Живорад Ивановић
Срђан Огњановић

МАТЕМАТИКА
2

Збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа

Дванаесто, доштампано издање

КРУГ
БЕОГРАД, 2010.

Аутори: *Живорад Ивановић*, професор
мр Срђан Огњановић, професор

МАТЕМАТИКА 2

Збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа

Једанаесто, измењено издање

Издавач: „Круг“, Београд, Устаничка 244 г

За издавача: *Маријана Милошевић*

Рецензенти: *Јасна Филиповић*, професор IX београдске гимназије
Лидија Трмчић, професор гимназије „Св. Марковић“ у Новом Саду

Уредник: *Живорад Ивановић*

Текст је обрађен компјутерски применом програмског пакета
$\mathcal{A}\kern-.1667em\lower.5ex\hbox{$\mathcal{M}$}\kern-.125em\mathcal{S}$-TEX Америчког математичког друштва

Коректура: *аутори*

Цртежи: *дипл. инж. Гордана Лазић*

Решењем министра просвете Републике Србије број 650-02-00293/2010-06 од 1.07.2010. године, уџбеник је одобрен за издавање и употребу.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

37.016:51(075.3)(076)

ИВАНОВИЋ, Живорад
Математика 2 : збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа / Живорад Ивановић, Срђан Огњановић ; [цртежи Гордана Лазић]. – 12. изд., доштампано. – Београд : Круг, 2010 (Нови Сад : SP Print). – 276 стр. : илустр. ; 24 cm

Тираж 2.000

ISBN 978-86-7136-155-2
1. Огњановић, Срђан [аутор]

COBISS.SR-ID 255028487

Тираж 2 000 примерака

Штампа: SP print, Нови Сад

Из предговора првом издању

Ова збирка писана је према измењеном наставном плану и програму за други разред гимназија и техничких школа, који се примењује од школске 1991/92 године. У њој су обрађени задаци из следећих тема:

1. Степеновање и кореновање
2. Квадратна једначина и квадратна функција
3. Експоненцијална и логаритамска функција
4. Тригонометријске функције

Свака од четири наведене теме обрађена је у посебној глави, а свака глава подељена је на већи број поглавља. На почетку сваког поглавља дате су дефиниције и тврђења чије је познавање неопходно за решавање задатака из тог поглавља. У оквиру сваког поглавља задаци су поређани од једноставних ка тежим. На крају сваке главе дат је ДОДАТАК у коме задаци на одређени начин повезују и обједињују садржај те главе.

У Београду, јула 1991. *Аутори*

Предговор осмом издању

Исправљене су уочене штампарске грешке и додати тестови за проверавање знања ученика. Како је досадашње искуство показало да је то *поуздан* и *једноставан* начин проверавања знања, предлажемо да се тестирање повремено користи у оцењивању ученика средње школе.

Тестови на крају књиге су само *предлог* и *модел* како састављати нове тестове. Уколико би се користили само предложени тестови, па и тестови уопште — то би била антипропаганда математике. Запоставило би се много тога што управо радимо у настави: развијање мисаоности, тачности, радозналости, креативности, склоности према стваралаштву, или кратко речено ученици би били ускраћени за стицање математичке културе.

У Београду, августа 1999. *Аутори*

Предговор десетом издању

У циљу уједначавања захтева који се постављају пред ученике, у најновијем издању направљена је једна оријентациона подела задатака из збирке у три групе – лакши (ниво оцена 2 и 3 – обојени зеленом бојом), тежи (ниво оцена 4 и 5 –

жутом) и најтежи задаци (из додатака уз главу – обојени црвеном бојом). При овоме жеља нам је била да помогнемо ученицима и њиховим наставницима у савлађивању планираног градива, а при томе смо свесни да је оваква подела на три групе задатака груба и непрецизна, па ће се, можда, у неким наредним издањима појавити нека побољшања и корекције.

У Београду, јула 2004. *Аутори*

ГРЧКИ АЛФАБЕТ

А	α	алфа	Н	ν	ни
Б	β	бета	Ξ	ξ	кси
Г	γ	гама	О	о	омикрон
Δ	δ	делта	П	π	пи
Е	ε	епсилон	П	ρ	ро
З	ζ	зета	Σ	σ	сигма
Х	η	ета	Т	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
И	ι	јота	Φ	φ	фи
К	$\varkappa$	капа	Ш	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
М	μ	ми	Ω	ω	омега

Садржај

Глава I: СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ 1
1.1. Степен чији је изложилац цео број 1
1.2. Кореновање 4
1.3. Комплексни бројеви 14
1.4. Додатак уз прву главу 18

Глава II: КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА И КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА 23
2.1. Квадратна једначина 23
2.2. Одређивање природе и знака решења квадратне једначине 24
2.3. Виетове формуле 24
2.4. Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце 24
2.5. Неке једначине са једном непознатом, које се своде на квадратне. 32
2.6. Квадратна функција 33
2.7. Квадратне неједначине 36
2.8. Системи квадратних једначина са две непознате 38
2.9. Ирационалне једначине и неједначине 41
2.10. Додатак уз другу главу 44

Глава III: ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА 53
3.1. Експоненцијална функција и њен график 53
3.2. Експоненцијалне једначине и неједначине 54
3.3. Појам и својства логаритма 57
3.4. Логаритамска функција и њен график 61
3.5. Логаритамске једначине и системи једначина 62
3.6. Логаритамске неједначине 66
3.7. Додатак уз трећу главу 67

Глава IV: ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ 71
4.1. Уопштавање појма угла 71
4.2. Основне релације између тригонометријских функција 72
4.3. Свођење тригонометријских функција на оштар угао 75
4.4. Тригонометријске функције збира и разлике два угла (адиционе формуле) 78
4.5. Тригонометријске функције двоструког угла 82
4.6. Тригонометријске функције полууглова 85
4.7. Трансформација производа тригонометријских функција у збир или разлику 88
4.8. Трансформација збира и разлике тригонометријских функција у производ 89
4.9. Основна својства тригонометријских функција 94
4.10. Инверзне тригонометријске функције 97
4.11. Тригонометријске једначине 99
4.12. Тригонометријске неједначине 102
4.13. Синусна теорема, косинусна теорема и примена 106

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА 111
Глава I — Степеновање и кореновање 111
Глава II — Квадратна једначина и квадратна функција 121
Глава III — Експоненцијална и логаритамска функција 169
Глава IV — Тригонометријске функције 187

ТЕСТОВИ 267
1. Степеновање и кореновање 267
2. Квадратна једначина и квадратна функција (I део) 269
3. Квадратна једначина и квадратна функција (II део) 270
4. Експоненцијалне једначине и неједначине 271
5. Логаритми 272
6. Тригонометрија (I део) 273
7. Тригонометрија (II део) 274
8. Тригонометрија (III део) 275
9. Тригонометрија (IV део) 276
Резултати 277

Литература 279

Глава I

СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ

1.1. Степен чији је изложилац цео број

Степеновање целим бројем дефинише се на следећи начин:

1° $a^1 = a, \quad a^{m+1} = a^m \cdot a, \quad m \in \mathbf{N};$

2° $a^0 = 1, \quad a \neq 0;$

3° $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0, \quad m \in \mathbf{N}.$

Основне особине операција са степенима чији су изложиоци цели бројеви ($a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $m, n \in \mathbf{N}$):

1° $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$ 2° $a^m : a^n = a^{m-n};$

3° $(a^m)^n = a^{mn};$ 4° $(ab)^m = a^m b^m;$

5° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}.$

Израчунати (задаци 1–5):

1. а) 2^{-3}; $(-3)^{-1}$; $(-1)^{-2}$; $((-2)^{-1} + (-3)^{-1}) : ((-3)^{-1} - (-6)^{-1})$;

б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$; $\dfrac{(-2)^{-3} - (-3)^{-2}}{(-4)^{-1}} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;

в) 2^0; $\left(-\dfrac{3}{8}\right)^0$; $(\sqrt{3})^0$; $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)^0 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)^0$;

г) $5 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-4}$; $-4 \cdot 10^4 + 2{,}5 \cdot 10^5$;

д) $0{,}5^{-1} + 0{,}25^{-2} + 0{,}125^{-3} + 0{,}0625^{-4}$.

2. а) $\dfrac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^{-5}}$ б) $\left(6 - 4\left(\dfrac{5}{16}\right)^0\right)^{-2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - \dfrac{3}{4}$;

в) $\dfrac{2^{-2}+2^{0}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}$; г) $\dfrac{0{,}6^{0}-(0{,}1)^{-1}}{\left(\dfrac{3}{2^{3}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{-1}}$;

д) $2^{3000}\cdot 3^{2000}$; ђ) $3^{200}\cdot 4^{-300}$; е) $5^{-2000}\cdot 2^{3000}$.

3. а) $x^{3}\cdot x^{2}\cdot x^{-6}$, $(x^{-3})^{2}\cdot(x^{-2})^{-1}$, $x\neq 0$;
б) $a^{-3}\cdot a^{-2}$, $a^{-4}:a^{-3}$, $a^{3}:a^{-2}$, $a\neq 0$;
в) $(a^{3}b^{-4}):(a^{-3}b^{4})$, $(a^{-3}b^{-2}):(a^{-4}b^{-5})$, $a,b\neq 0$;
г) $\dfrac{2a^{2}}{5b^{-2}}:\dfrac{10a^{-3}}{6b^{-1}}$, $\left(\dfrac{b^{0}a^{-2}}{b^{-3}}\right)^{6}\cdot\left(\dfrac{a^{-3}b^{-1}}{b^{12}}\right)^{-3}$, $a,b\neq 0$.

4. а) $(x^{-3})^{2}\cdot(x^{-5})^{-1}$, $x\neq 0$; б) $(p^{2}x^{-3})^{-2}\cdot(p^{-1}x^{2})^{-3}$, $x,p\neq 0$;
в) $(a^{-3}b^{-1}):(a^{-2}b^{3})^{-2}$, $a,b\neq 0$;
г) $\left(\dfrac{2}{3}x^{-2}-\dfrac{3}{4}x^{-3}\right)\left(\dfrac{1}{6}x^{2}-\dfrac{3}{2}x^{-3}\right)$, $x\neq 0$.

5. а) $3a^{-2}-4a^{-2}+7a^{-2}$, $a\neq 0$; б) $b^{5}\cdot b^{3}\cdot b^{-2}$, $b\neq 0$;
в) $c^{n+1}\cdot c^{n-2}\cdot c^{n+3}$; г) $28d^{2x+1}:7d^{3}$, $d\neq 0$;
д) $(a-x)^{3}\cdot(x-a)^{4}$; ђ) $2x^{2a-3b}\cdot 3x^{b-a}\cdot 5x^{4a+2b}$;
е) $a^{m+p}:a^{2m-3p}$, $a\neq 0$; ж) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n-1}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{2n-1}$, $a,b\neq 0$;
з) $(m^{-2})^{3}\cdot(m^{3})^{-2}\cdot(m^{-4})^{2}$, $m\neq 0$ и) $4a^{0}+3(b+c)^{0}$, $a,b+c\neq 0$;
ј) $0{,}5(x+y)^{-1}\cdot 2(x+y)^{2}$, $x+y\neq 0$.

6. Упростити* изразе $(a,b,c,d,x,y,z,u\neq 0)$:
а) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{3}:\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-5}$; б) $\dfrac{25a^{7}b^{3}}{28c^{2}d^{5}}\cdot\dfrac{21c^{2}d^{4}}{15a^{6}b^{2}}$;
в) $\left(\dfrac{2a^{x}b^{2}}{3c^{y}d^{5}}\right)^{2}:\left(\dfrac{4a^{x-1}b}{3c^{1-y}d^{2}}\right)^{3}$; г) $15x^{a+1}y^{a+2}:5x^{a+2}y^{a+5}$;
д) $\dfrac{25x^{n}y^{n-4}}{27z^{n-1}u^{n-2}}\cdot\dfrac{6z^{n-2}u^{n-2}}{10x^{1-n}y^{n-1}}$; ђ) $\dfrac{3a^{n+1}b^{1-n}}{4c^{2-n}d^{1+n}}:\dfrac{3a^{n-1}b^{n-1}}{5c^{1-n}d^{2+n}}$.

7. Упростити изразе:
а) $(a-b)^{n}(a+b)^{-n}(a-b)^{n-1}(a+b)^{1-n}$, $a\neq\pm b$;
б) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{5}:\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{-4}$, $a\neq\pm b$;
в) $\left(\dfrac{x+3}{1-y}\right)^{n}\cdot\left(\dfrac{1-y^{2}}{x^{2}-9}\right)^{n}$, $y\neq\pm 1$, $x\neq\pm 3$;
г) $\left(\dfrac{x^{2}-y^{2}}{x}\right)^{n}\cdot\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{n}:\left(\dfrac{x-y}{x}\right)^{n}$, $x\neq 0$, $x\neq\pm y$;
д) $(x-y)^{3}(x+y)^{3}(x^{2}-y^{2})^{-3}$, $x\neq\pm y$.

---

* „Упростити израз“, „средити израз“ и слично, подразумева да треба написати израз једнак датом, који је, у одређеном смислу једноставнији, краћи, подеснији.

---

8. Доказати:
а) $a^{-n}(a^{n}-1)^{-1}-2(a^{2n}-1)^{-1}+a^{-n}(a^{n}+1)^{-1}=0$, $a\neq 0$, $a\neq\pm 1$;
б) $\dfrac{1}{2(1+a^{n})}-\dfrac{1}{2(1-a^{-n})}-\dfrac{1}{a^{-2n}-1}=\dfrac{1}{2}$, $a\neq 0$, $a\neq\pm 1$;
в) $(a^{n}-1)^{-1}+(a^{n}+1)^{-1}-2a^{n}(a^{2n}-1)^{-1}=0$, $a\neq\pm 1$;
г) $\dfrac{a^{n}-a^{-n}}{a^{n}+a^{-n}-2}=\dfrac{a^{n}+1}{a^{n}-1}$, $a\neq 0$, $a\neq\pm 1$;
д) $\dfrac{a^{n}-a^{-n}}{a^{n}+a^{-n}+2}=\dfrac{a^{n}-1}{a^{n}+1}$, $a\neq 0$, $a\neq -1$.

Упростити изразе (задаци 9–11):

9. а) $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}:(a^{-1}-b^{-1})^{-1}$, $a,b\neq 0$, $a\neq\pm b$;
б) $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a^{2}+b^{2}}{ab}\right)^{-1}:\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{2}-b^{2}}$, $a,b\neq 0$, $a\neq\pm b$;
в) $\left(\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{yx^{-1}+xy^{-1}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{2}\right)^{-1}-\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$, $xy\neq 0$, $x\neq -y$;
г) $\dfrac{(ab^{-1}+1)^{2}}{ab^{-1}-a^{-1}b}\cdot\dfrac{a^{3}b^{-3}-1}{a^{2}b^{-2}+ab^{-1}+1}:\dfrac{a^{3}b^{-3}+1}{ab^{-1}+a^{-1}b-1}$, $ab\neq 0$, $a\neq\pm b$.

10. а) $\dfrac{1-x^{-4}}{x-x^{-1}}-\dfrac{2}{x^{3}}+\dfrac{x^{-4}-x^{2}}{x-x^{-1}}$, $x\neq 0$, $x\neq\pm 1$;
б) $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^{2}}{4-4x^{-1}+x^{-2}}-\dfrac{4x^{2}(2x+1)}{1-2x}$, $x\neq 0$, $x\neq\dfrac{1}{2}$;
в) $\dfrac{a^{-1}-(b+c)^{-1}}{a^{-1}+(b+c)^{-1}}\left(1+\dfrac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}\right):\left(\dfrac{abc}{a-b-c}\right)^{-1}$,
$abc\neq 0$, $b+c\neq 0$, $a\neq b+c$, $a+b+c\neq 0$;
г) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^{2}b^{2}}{(a+b)^{2}-3ab}\left(\dfrac{a^{2}-b^{2}}{ab}\right)^{-1}$, $ab\neq 0$, $a\neq\pm b$;
д) $\dfrac{\left(m^{2}-\dfrac{1}{n^{2}}\right)^{m}\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^{2}-\dfrac{1}{m^{2}}\right)^{n}\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}$, $mn\neq 0$, $mn\neq\pm 1$.

11. а) $\left(\dfrac{2^{x}+2^{-x}}{2}\right)^{2}-\left(\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2}\right)^{2}$;
б) $\dfrac{1}{2^{-2x}-2^{-x}}+\dfrac{1}{2^{-2x}+2^{-x}}+\dfrac{2}{1-2^{-2x}}$, $x\neq 0$;
в) $\dfrac{2^{-2x}-2^{-x}-6}{2^{-2x}-4}+\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}-2}-2$, $x\neq -1$;
г) $\left(\dfrac{2^{x}}{1-2^{-x}}+\dfrac{2^{-x}}{1+2^{-x}}\right)-\left(\dfrac{2^{x}}{2^{-x}+1}-\dfrac{1}{2^{-x}-1}\right)$, $x\neq 0$;
д) $(50^{x}+30^{x}+18^{x})(5^{x}-3^{x})$; ђ) $(25^{m}+20^{m}+16^{m})(5^{m}-4^{m})$.

12. Доказати следеће идентитете.

а) $(x^n - x^{-n})(x^n + x^{-n} - 2)^{-1} = (x^n + 1)(x^n - 1)^{-1}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$;

б) $(x^n - x^{-n})(x^n + x^{-n} + 2)^{-1} = (x^n - 1)(x^n + 1)^{-1}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$;

в) $x^{-n}(x^n - 1)^{-1} + x^{-n}(x^n + 1)^{-1} = 2(x^{2n} - 1)^{-1}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$;

г) $3a^{-n}(1 - a^{-n})^{-1} - 2a^{-n}(1 + a^{-n})^{-1} - a^n(a^{2n} - 1)^{-1} = 5a^{-n}(a^n - a^{-n})^{-1}$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$;

д) $(ab^{-1} - a^{-1}b)(a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1} = ab(a+b)(a-b)^{-1}$, $ab(a-b) \neq 0$;

ђ) $2^{-1}(1+a^n)^{-1} - (1-a^{-n})^{-1} - (a^{-2n} - 1)^{-1} = (2(1-a^n))^{-1}$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$.

13. Израчунати:

а) $\dfrac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}}\left(1 - \dfrac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right)$, ако је $x = (a-1)^{-1}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$;

б) $(x + x^{-1}) : (x - x^{-1})$, ако је $x = \dfrac{2^{-n} + 1}{2^{-n} - 1}$;

в) $\dfrac{1 + x^{-1}}{1 - x^{-1}}\left(1 - \dfrac{2x - 1}{x}\right)$, ако је $x = \left(\dfrac{2}{a-1}\right)^{-1}$, $a \neq 1$, $a \neq 3$;

г) $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$, ако је $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$.

1.2. Кореновање

Нека је $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Симбол $\sqrt[n]{a}$ означава:

(i) реалан број, чији је n-ти степен једнак броју a, ако је $n \in \mathbf{N}$ и $a \geq 0$ или $n = 2k+1$, $k \in \mathbf{N}$ и $a \in \mathbf{R}$;

(ii) позитиван реалан број, чији је n-ти степен једнак броју a, ако је $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$ и $a > 0$.

Основна својства операција са коренима:

1. Ако је $a \geq 0$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, тада је $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.
2. Ако је $a \geq 0$ и $n \in \mathbf{N}$, тада је $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
3. Ако је $a \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$, тада је $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ – непаран,} \\ |a|, & n \text{ – паран.} \end{cases}$
4. Ако је $a, b \geq 0$ и $n \in \mathbf{N}$, тада је $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
5. Ако је $a \geq 0$, $b > 0$, $n \in \mathbf{N}$, тада је $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
6. Ако је $a \geq 0$, $m, n \in \mathbf{N}$, тада је $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
7. Ако је $a \geq 0$, $m, n \in \mathbf{N}$, тада је $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.
8. Ако је $a \geq 0$ и $m, n \in \mathbf{N}$, тада је $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.
9. Ако је $a, b \geq 0$ и $n \in \mathbf{N}$, тада је $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

14. Израчунати:

а) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $25^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; г) $0{,}25^{-0{,}5}$;

д) $\left(\dfrac{1}{256}\right)^{0{,}375}$; ђ) $\left(\dfrac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}}$; е) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$;

ж) $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\frac{4}{5}}$; з) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + (64^{-\frac{1}{9}})^{-3}$.

15. Израчунати:

а) $\left(\left(\dfrac{3}{16} : \left(8 + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1\right)^{-4}$;

б) $\left[\left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{3} : \dfrac{3}{5}\right) : \left(13 + \dfrac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$;

в) $\left[\left(1 + \dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}$.

16. Написати помоћу корена следеће изразе $(x, y, z, v > 0)$:

а) $x^{-\frac{2}{5}}$; б) $x^{-\frac{3}{20}}y^{-\frac{7}{15}}$; в) $x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{2}{25}}$;

г) $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}}{z^{-\frac{7}{8}}v^{\frac{5}{3}}}$; д) $(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{12}})^{-0{,}75}$; ђ) $\dfrac{x^{-\frac{5}{2}}}{y^{\frac{3}{4}}} \cdot z^{-\frac{7}{12}}$.

17. Упростити изразе $(x, y, z > 0)$:

а) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-1}$; б) $x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{4}{5}} \cdot z^{\frac{5}{6}} : (x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{7}{12}})$;

в) $((x^{\frac{3}{4}})^2)^{-\frac{1}{3}} : ((x^{-1})^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$; г) $(x^n x^{\frac{1}{n-1}}) : (x^{n^2})^{\frac{1}{n-1}}$.

Израчунати вредности следећих израза (задаци 18–20).

18. а) $\sqrt{25ab^4}$; б) $2a\sqrt[3]{b}$; в) $\left(\sqrt[3]{4a^2b}\right)^2$;

г) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[6]{a^2b^3} \cdot \sqrt[6]{a^9b^8}$, $a, b > 0$.

19. а) $\sqrt[a]{x^n} : \sqrt[n]{x^a}$, $x > 0$; б) $\left(\dfrac{a^{n+1}}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$;

в) $(a^n b^{2n})^{-\frac{1}{n}}$, $a, b > 0$; г) $[z \cdot (z \cdot z^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}]^{\frac{1}{3}}$, $z \geq 0$;

д) $(a^n b^{\frac{1}{n}})^{-\frac{1}{n}}$, $a, b > 0$; ђ) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{a^2}}$, $a > 0$;

е) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$, $x > 0$; ж) $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$, $x > 0$.

20. а) 1° $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, 2° $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$, 3° $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3}$;

б) 1° $\sqrt[3]{4a} \cdot \sqrt[3]{16a^5}$, 2° $\sqrt[4]{5a^2} \cdot \sqrt[4]{5a^3b^3} \cdot \sqrt[4]{25a^3b}$, $a, b > 0$;

в) 1° $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; 2° $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$, $a > 0$;

г) $\sqrt[x]{a^{3x-4}} \cdot \sqrt[x]{a^{1-x}} \cdot \sqrt[x]{a^{3-x}}$, $a > 0$;

д) 1° $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, 2° $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$;
ђ) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$;
е) 1° $\sqrt{12}:\sqrt{3}$, 2° $\sqrt{50}:\sqrt{2}$, 3° $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$;
ж) 1° $\sqrt[3]{27a^5}:\sqrt[3]{9a^2}$, 2° $8\sqrt[4]{a^3}:2\sqrt[3]{a}$, 3° $\sqrt[4]{3b^7}:\sqrt[4]{3b^3}$, $a,b>0$;
з) 1° $\left(\sqrt[5]{a^2b^3}\right)^8:\left(\sqrt[5]{a^2b^3}\right)^3$, 2° $\left(\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)^n:\left(\sqrt[m]{a^{m-2}}\right)^n$, $a>0$.

21. Који је број већи:
а) $3\sqrt{5}$ или $5\sqrt{3}$;
б) $0{,}5\sqrt{2}$ или $0{,}3\sqrt{3}$;
в) $7\sqrt{0{,}2}$ или $3{,}5\sqrt{0{,}4}$;
г) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?

22. Одредити који од следећих корена не постоје (немају смисла):
а) $\sqrt{-16}$; б) $\sqrt{0\cdot(-9)}$; в) $\sqrt{-49\cdot 100}$; г) $\sqrt{-4\cdot(-25)}$;
д) $\sqrt{(-7)^2}$; ђ) $\sqrt{(-5)^3}$; е) $\sqrt{(-2)^6}$; ж) $\sqrt{(-1)^4}$.

23. У следећим изразима одредити вредности променљивих за које су корени дефинисани:
а) $\sqrt{8x}$; б) $\sqrt{-9x}$; в) $\sqrt{-36a^2}$; г) $\sqrt{+50a^2}$;
д) $\sqrt{(x-1)^2}$; ђ) $\sqrt{5-x}$; е) $\sqrt{x-12}$; ж) $\sqrt{18a^2b}$;
з) $\sqrt{27+x}$; и) $\sqrt{x^2+y^3}$; ј) $\sqrt{(30-x)^3}$; к) $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$.

24. Израчунати:
а) 1° $\sqrt{0{,}64\cdot 49}$; 2° $\sqrt{0{,}01\cdot 144\cdot 1{,}21}$; 3° $\sqrt{625\cdot 0{,}0001\cdot 169}$;
4° $\sqrt{\dfrac{1}{9}:196\cdot\dfrac{25}{81}\cdot 0{,}16}$; 5° $\sqrt{5\cdot 45}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{25}{27}}$.
б) 1° $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; 2° $\sqrt{75}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{32}$; 3° $\sqrt{2{,}25}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$;
4° $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{0{,}0225}$; 5° $\sqrt{2^3\cdot 5^3\cdot 10}\cdot\sqrt{1\dfrac{9}{16}\cdot 0{,}000625}$.

25. Извући чиниоце испред знака корена у следећим изразима ($a,b,c>0$, $n\in\mathbf{N}$):
а) $\sqrt{25\cdot 7\cdot 9}$; б) $\sqrt{0{,}09\cdot 64\cdot 49}$; в) $\sqrt{18\cdot 25}$;
г) $\sqrt{100\cdot 27\cdot 25}$; д) $\sqrt{16a^2b^4}$; ђ) $\sqrt{48a^5b^{12}c^3}$;
е) $\sqrt{63ab^{21}c^{2n}}$; ж) $\sqrt{(a+b)^3}$; з) $\sqrt{8a^7(a+b)^{4n}}$.

26. Израчунати:
а) 1° $\sqrt{\dfrac{100}{81}}$; 2° $\sqrt{2\dfrac{1}{4}}$; 3° $\sqrt{\dfrac{49\cdot 16}{25}}$; 4° $\sqrt{\dfrac{4\cdot 121\cdot 900}{64\cdot 169}}$;
5° $\sqrt{\dfrac{16\cdot 0{,}36\cdot 10000}{0{,}0004\cdot 81\cdot 196}}$;
б) 1° $\sqrt{72}:\sqrt{2}$; 2° $\sqrt{245}:\sqrt{5}$; 3° $\sqrt{2{,}43}:\sqrt{3}$; 4° $\sqrt{0{,}18}:\sqrt{0{,}5}$;
5° $\sqrt{0{,}07}:\sqrt{\dfrac{1}{7}}$;

в) 1° $\sqrt{5^4}$; 2° $\sqrt{2^6a^2}$; 3° $\sqrt{4\cdot 3^2a^8b^4}$; 4° $\sqrt{\dfrac{5^2x^{10}}{225y^{16}}}$, $y\neq 0$;
5° $\sqrt{a^{12}\cdot\dfrac{m^6}{n^{20}}}$, $n\neq 0$.

27. Унети чинилац под знак корена ($x,a,b,y>0$):
а) $5\sqrt{7}$; б) $0{,}5\sqrt{10}$; в) $\dfrac{1}{3}\sqrt{27}$; г) $7\sqrt{\dfrac{5}{14}}$;
д) $x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; ђ) $2a\sqrt{\dfrac{x}{4a}}$; е) $b^3\sqrt{b^4}$; ж) $xy^2\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$;
з) $(x-1)\sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$, $x>1$; и) $\dfrac{x+y}{a-b}\sqrt{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{xy+y^2}}$, $a>b$, $x+y>0$, $y>0$.

28. Доказати да је:
а) $\sqrt{80}-2-4\sqrt{5}=-2$;
б) $\sqrt{63}+12-3\sqrt{7}-\sqrt{16}=8$;
в) $(0{,}5\sqrt{98}+4\sqrt{18})-\left(0{,}2\sqrt{50}+\dfrac{1}{3}\sqrt{72}-\sqrt{200}\right)=22{,}5\sqrt{2}$;
г) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{60}-\sqrt{54}\right)-(2{,}5\sqrt{600}-0{,}2\sqrt{15})=\dfrac{6\sqrt{15}}{5}-28\sqrt{6}$.

Израчунати вредности следећих израза (задаци 29–31).

29. а) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt{32}$;
в) $5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$; г) $\sqrt[3]{27c^4}-\sqrt[3]{8c^4}+\sqrt[3]{125c^4}$;
д) $3\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-128}+\sqrt[3]{250}$; ђ) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$, $x>0$.

30. а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^{1/2}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^2\sqrt[5]{ab^3}\right)^2}$; б) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\right)^6}$, $a,b>0$.

31. а) $\dfrac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{5}}$;
б) $\dfrac{2{,}4\sqrt{8\frac{1}{3}}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{2\frac{1}{12}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt{0{,}5}+1{,}5\sqrt{2}+20\sqrt{\frac{1}{50}}-\sqrt{32}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

32. Доказати да важи формула:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},\qquad A\geq 0,\ B\geq 0,\ A^2\geq B.$$

Ова формула се често користи при трансформацији израза који садрже квадратне корене.

33. Применом претходног идентитета одредити:

а) $\sqrt{3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{4\pm 2\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{7\pm 4\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$; ђ) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$;

е) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; ж) $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$.

34. Проверити следеће једнакости:

а) $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}=\sqrt{2}$; б) $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{14}$;

в) $\sqrt{4+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$;

35. Рационалисати имениоце, односно, ослободити се корена из именилаца следећих разломака:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}$; б) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{8-3\sqrt{7}}$;

г) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}$; д) $\dfrac{1}{(1-\sqrt{11})^2}$; ђ) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; ж) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

36. Доказати да важе следеће једнакости:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

37. Рационалисати имениоце следећих разломака ($a>0$, $b>0$, $a\neq\pm b$):

а) $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$.

38. Упростити изразе:

а) $\sqrt{6+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{5}}}$;

б) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Израчунати (задаци 39–40):

39. а) $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$;

г) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; д) $\sqrt{(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})^2}$.

40. а) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$; б) $3\left(\dfrac{2}{\sqrt{10}+5}+\dfrac{5}{\sqrt{10}-2}-\dfrac{7}{\sqrt{10}}\right)$;

в) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$;

д) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}$; ђ) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

41. Шта је веће, $\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ или $\sqrt{3+\sqrt{5}}$?

42. Упростити изразе:

а) $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}$; б) $\sqrt{b-2\sqrt{ab-a^2}}$.

43. Проверити следеће једнакости:

а) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$;

б) $\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=2$.

Ослободити се ирационалности у имениоцима следећих разломака (задаци 44–46) ($a>0$, $b>0$, $a>b$):

44. а) 1° $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$, 2° $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$;

б) 1° $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}}$, 2° $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$;

в) 1° $\dfrac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}$, 2° $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$, 3° $\dfrac{1}{(3-\sqrt{2})^5}$;

г) 1° $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, 2° $\dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$,

3° $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$, 4° $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$;

д) 1° $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$, 2° $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$, 3° $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$;

ђ) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

45. а) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$; б) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$;

г) $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; д) $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; ђ) $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

46. а) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$; г) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

д) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

47. Упростити изразе:

а) $A=\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

б) $A=\left(\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

48. Доказати да је:

а) $(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=\sqrt[6]{2+\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$; г) $(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}})\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=2(1+\sqrt{2})$.

49. Упростити изразе:

а) $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}$;

в) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$;

д) $\sqrt[3]{3+9\sqrt[3]{12}-9\sqrt[3]{18}}$; ђ) $\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$;

е) $\dfrac{\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$.

50. Израчунати:

а) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; г) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

51. Упоредити бројеве $a=\dfrac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ и $b=\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$.

Упростити следеће изразе (задаци 52–53):

52. а) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2+2^{-3/2}\cdot\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{1/2}-\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1/2}\right)\left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1/2}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-1}$.

53. а) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot(\sqrt{3}+5)^{-1}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$;

в) $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{8\sqrt[3]{24}}+\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}$; г) $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$;

д) $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$;

ђ) $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$;

е) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

54. Доказати да важе следеће једнакости:

а) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$;

б) $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$;

г) $\left(\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\dfrac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$;

д) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

55. Одредити вредност израза $\sqrt{x^2}$ за а) $x=-1$; б) $x=2$; в) $x=0$.

56. Одредити све вредности променљиве t из скупа $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ за које важи: а) $\sqrt{t^2}=t$; б) $\sqrt{t^2}=-t$.

Упростити изразе (задаци 57–60):

57. а) $\sqrt{x^2}$, $x\geq 0$; б) $\sqrt{x^2}$, $x\leq 0$; в) $\sqrt{x^4}$, $x<0$;

г) $\sqrt{x^6}$, $x<0$; д) $\sqrt{y^{12}}$, $y\geq 0$; ђ) $\frac{1}{2}\sqrt{4y^6}$, $y<0$.

58. а) $\sqrt{(x+1)^2}$, $x\leq -1$; б) $\sqrt{(7+x)^2}$, $x\geq -7$; в) $\sqrt{(2-x)^2}$, $x\leq 2$;

г) $\sqrt{(x-2)^2}$, $x>2$; д) $\sqrt{(3-x)^2}$, $x\leq 0$.

59. а) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$, за $x\geq 1$;

б) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}$, за $-3\leq x\leq 3$;

в) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$, за $x\leq -1$;

г) $\sqrt{9-6x+x^2}+\sqrt{4-4x+x^2}-\sqrt{25-10x+x^2}$, за $2\leq x\leq 3$.

60. а) $\sqrt{36x^4y^2}$, $x\geq 0$, $y\leq 0$; б) $\sqrt{64x^8y^6}$, $x\leq 0$, $y\geq 0$;

в) $\sqrt{\dfrac{1}{81x^6}}$, $x<0$; г) $\sqrt{\dfrac{(-a)^2}{b^4}}$, $a\leq 0$, $b>0$;

д) $\sqrt{\dfrac{49}{25a^6b^{12}}}$, $a<0$, $b<0$; ђ) $\sqrt{\dfrac{(-4)^2}{(b+3)^2}}$, $b<-3$;

е) $5\sqrt{\dfrac{a^6(a+1)^{10}}{25}}$, $a\leq -1$; ж) $\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{a}\right)(a-1)}$, $0<a<1$.

61. Доказати једнакости:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)=x-y$, $x,y>0$;

б) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x+y$;

в) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x-y;$

г) $\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}\right)=x-y,\ x,y>0.$

62. Израчунати вредност израза:

а) $(16-x^2)^{\frac{1}{2}}$ за $x=(10+2\cdot 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$;

б) $\dfrac{5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{5}}}{9c^{-\frac{1}{2}}d^{-\frac{3}{5}}}$ за $a=64$, $b=243$, $c=\dfrac{1}{4}$, $d=32$;

в) $x^4-a^{-\frac{3}{2}}b^{-1}(a^3+b^3)x^2+b$ за $x=a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$;

г) $\dfrac{1-a^{-1/2}}{1+a^{1/2}}-\dfrac{a^{1/2}-a^{-1/2}}{a-1}$ за $a=5$.

63. Доказати идентитете:

а) $(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^2=\dfrac{(x+1)^2}{x},\ x>0;$

б) $\dfrac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{-\frac{1}{2}}}=2\dfrac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}},\ x>0,\ x\neq 1.$

64. Израчунати вредност израза:

а) $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{(a^2-ab)^{2/3}}:\dfrac{a^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ за $a=1{,}2$, $b=\dfrac{3}{5}$;

б) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}-\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ за $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\dfrac{x^{1/2}+1}{x+x^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{3/4}}{x-1}+\dfrac{x^{3/4}-1}{x^{3/4}+1}$ ако је $x=16$;

г) $\dfrac{x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3}{x-\sqrt{3}}$ ако је $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$;

д) $(a+x^{1/2})^{1/2}+(a-x^{1/2})^{1/2}$ ако је $x=4(a-1)$.

65. Упростити изразе у следећим примерима $(x,y,p,q>0)$:

а) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}},\ (x\neq 1);$

б) $\left[(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-1}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-1}\right]:\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q},\ (p\neq q);$

в) $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}},\ (x\neq 1);$

г) $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1;$

д) $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}\cdot y^{1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}},\ (x\neq y).$

66. Доказати идентитете:

а) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}=0,\ x\neq 0,\ x\neq 1;$

б) $\dfrac{1+x^{1/2}}{1+x^{1/2}+x}:\dfrac{1}{x^{3/2}-1}=x-1,\ x\geqslant 0,\ x\neq 1.$

Упростити изразе (задаци 67–68):

67. а) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2,\ a,b>0,\ a\neq b;$

б) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\left(\dfrac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}\right),\ x,y>0,\ x\neq y;$

в) $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}-1,\ a,b,c>0;$

г) $\dfrac{(a+1)^2-(a^2-1)+2\sqrt{a^2-1}}{a^2-1-(a-1)^2+2\sqrt{a^2-1}},\ |a|>1;$

д) $\left(\dfrac{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n}-\sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n}+\sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}\right)^{-2}$ за $x=\sqrt{mn}$, $m>n>0$;

ђ) $\dfrac{(m+x)^{1/2}+(m-x)^{1/2}}{(m+x)^{1/2}-(m-x)^{1/2}}$ за $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$, $m>0$, $0<n<1$.

68. а) $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\dfrac{1}{\sqrt{p^3}-\sqrt{q^3}}:\dfrac{1}{p+\sqrt{pq}+q}\right]\cdot\dfrac{p-q}{2p}+\dfrac{1}{p+\sqrt{p}};\ (p,q>0);$

б) $\dfrac{p^{3/2}-q^{3/2}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}-\dfrac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}}-\dfrac{p^{3/2}+q^{3/2}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}+\dfrac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}};\ (p>0,\ q>0,\ p\neq q);$

в) $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}+\left(\dfrac{a\sqrt{a}+x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\sqrt{ax}\right):(a-x);\ (a>0,\ x>0,\ a\neq x);$

г) $\dfrac{a+b}{a^{2/3}-a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}-\dfrac{a-b}{a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}+\dfrac{a^{2/3}-b^{2/3}}{a^{1/3}+b^{1/3}};\ (a\neq -b);$

д) $\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1/2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1/2}\right)^{-2}\right)^{1/2},\ 0<a<b.$

69. Израчунати $(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$:

а) $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}-\dfrac{1-a^{-2}}{\sqrt{a}+a^{-1/2}}-a^{1/2},\ a\neq 1;$

б) $\left(b\sqrt[3]{\dfrac{b-1}{(b+1)^2}}+\dfrac{b-1}{\sqrt[3]{(b^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(b^2-1)^{4/5},\ b\neq 1;$

в) $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{(ab)^{-1/2}}\right)(a-b)^{-1};$

г) $\dfrac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a^3b^{-3}}-\sqrt{b^3a^{-3}}\right):\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}+1\right)\right)\dfrac{2(a-b)^{-1}}{(ab)^{-1/2}};$

д) $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}}\cdot\dfrac{a^{2/3}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})}{(a-b)^{1/3}};$

ђ) $\left(\dfrac{2a+b^{1/2}a^{1/2}}{3a}\right)^{-1}\left(\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}}-\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$

1.3. Комплексни бројеви

Комплексни бројеви су изрази облика $a+ib$, где су a и b реални бројеви, а i неки симбол, за које су дефиниције релације једнакости и операција сабирања и множења следеће:

1° $a+ib=c+id \iff (a=c)\wedge(b=d);$

2° $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d);$

3° $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$

Број a је реални део комплексног броја $z=a+ib$, а број b његов имагинарни део: $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$. Доказује се да је $i^2=-1$ и да се може дефинисати дељење комплексних бројева:

4° $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2},\quad c^2+d^2>0.$

За комплексни број $z=a+ib$ њему конјугован број је $\overline{z}=a-ib$.

Модул комплексног броја $z=a+ib$ је $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Израчунати (задаци 70–71):

70. а) $i^2+i^3+i^4;$ б) $i^5+i^{-4}+i^{121};$
в) $i^{-5}+i^{-17}+i^{36};$ г) $i^{125}+(-i)^{60}+i^{83}.$

71. а) $(2i)^2+(-2i)^4;$ б) $(1+i)^4+(1-i)^4;$
в) $\dfrac{1}{i}+\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4;$ г) $(-5+4i)(2+3i);$
д) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1000};$ ђ) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3000}+\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3000}.$

72. Доказати да је:
а) $(1+i)^{50}=2^{25}i;$ б) $(1-i)^{100}=-2^{50};$
в) $(2-i)^6=-117-44i;$ г) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(1-i)^{500}}=-2^{250}.$

Израчунати (задаци 73–74):

73. а) $(3-4i)(3+4i);$ б) $\left(3+\dfrac{2}{3}i\right)\left(3-\dfrac{2}{3}i\right);$
в) $\left(-\dfrac{1}{3}-2i\right)\left(-\dfrac{1}{3}+2i\right);$ г) $\dfrac{3-2i}{5}\cdot\dfrac{3+2i}{5};$
д) $(-a+bi)(a+bi);$ ђ) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}.$

74. а) $(2+5i)(3-4i);$ б) $\left(\dfrac{3}{4}+i\right)\left(2-\dfrac{5}{6}i\right);$
в) $(2+3i)\cdot(x-yi);$ г) $(a+bi)(c-di);$
д) $\dfrac{17+19i}{7-i};$ ђ) $\dfrac{5-10i}{3+4i};$ е) $\dfrac{-2+16i}{3i-1};$ ж) $\dfrac{4+\frac{1}{2}i}{2-3i}.$

75. Израчунати вредност израза:
а) x^2-2x+2 за $x=1+i;$ б) x^2-x+1 за $x=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

76. Нека је $f(z)=-z^3+3z^2+z+2$ и $g(z)=z^2-5(1+i)z+17i$. Израчунати $f(3+2i)$, $f(3-2i)$, $g(4+i)$, $g(1+4i)$.

77. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја:
а) $\dfrac{15}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}};$ б) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}};$ в) $\dfrac{1-3\sqrt{5}i}{7+\sqrt{5}i};$
г) $\dfrac{3+i}{(2-i)^2};$ д) $\dfrac{1-i^3}{(1+i)^3};$ ђ) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3.$

78. Израчунати:
а) $(2-3i)(3+4i)+\dfrac{1-i}{1+i}+(2+i)^2+(1+i)^4;$
б) $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}-\dfrac{(1-i)^3}{1+i};$ в) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-2i};$ г) $\dfrac{i^{102}+i^{101}}{i^{100}-i^{99}}.$

79. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја z:
а) $z=\dfrac{-41+63i}{50}-\dfrac{6i+1}{1-7i};$ б) $z=\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^2;$
в) $z=\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{i+2};$ г) $z=\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$

80. Наћи реалне бројеве x и y ако је:
а) $(2+3i)x+(3+2i)y=1;$ б) $(8-3i)x+(5-2i)y=-i;$

в) $(x+iy)(1+2i)=1-2i$; г) $\dfrac{(x-4)+i(y-1)}{1+i}=2-5i$.

81. Наћи реалне бројеве x и y тако да је:

а) $(1+6i)x-(2-3i)y=9i-x$; б) $(4+3i)x-(2-i)y-10i=0$;

в) $(1-3i)x+(2+5i)y-2i=0$; г) $(1+i)x-(2-i)y=(3-2i)y+4i(x+3)$

82. Одредити реалне бројеве x и y, ако је:

а) $\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{1}{2+i}+\dfrac{1}{-2+4i}$; б) $\dfrac{x-2}{1-i}+\dfrac{y-3}{1+i}=1-3i$.

83. Одредити комплексан број z ако је $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$.

84. Доказати да је $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$.

85. Одредити z_1+z_2, z_1z_2, z_1-z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, ако је:

а) $z_1=2+5i$, $z_2=1-7i$; б) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

Израчунати (задаци 86–87):

86. а) $z=\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$; б) $z=\dfrac{(1+i)^8+(i-1)^8}{(1+i)^6-(1-i)^6}$;

в) $z=\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; г) $\dfrac{(1+i\sqrt{7})^4+(1-i\sqrt{7})^4}{(-1+i\sqrt{3})^4+(-1-i\sqrt{3})^4}$.

87. а) $\dfrac{10-i\sqrt{5}}{10+i\sqrt{5}}$; б) $\left(\dfrac{4}{i\sqrt{3}-1}\right)^{12}$; в) $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$;

г) $\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi}-\dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}$, $a^2+b^2\neq 0$;

д) $\dfrac{(x+i)^3-(x-i)^3}{(x+i)^2-(x-i)^2}$, $x\neq\pm i$, $x\neq 0$; ђ) $\dfrac{(1+i)^6-(1-i)^6}{(1+i)^6\cdot(1-i)^6}$.

Одредити модуле комплексних бројева (задаци 88–89):

88. а) $2-i$; б) $2\sqrt{6}+5i$; в) i; г) $9+2i$;

д) $3+2\sqrt{2}i$; ђ) $\dfrac{15}{2}-\dfrac{35}{2}i$; е) $a+b+(a-b)i$, $a, b\in\mathbf{R}$.

89. а) $z=\dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$; б) $z=\dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^4}$;

в) $z=\dfrac{(2-i)(1+i)}{3-i}$; г) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

90. а) Израчунати: $|i|$, $\overline{i}$, $|2i|$, $\overline{2i}$.

б) Израчунати $\overline{z}-z-2\dfrac{\overline{z}}{z}$ ако је $z=1-i$.

91. Решити систем једначина

$$z_1+2z_2=1+i,\qquad 3z_1+iz_2=2-3i.$$

92. Нека је $f(z)=z^2-\overline{z}^2$. Одредити $f(5)$, $f(i)$, $f(1+i)$, $f\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{6}{5}i\right)$.

93. Ако је $z=1+i$, доказати:

а) $z^2(z^2-z+1)=-2$; б) $z^2+(z-\overline{z})i+2\overline{z}=0$.

94. Одредити $z=x+iy$ ако је:

а) $(3+i)x+(1+i)y=7+i$; б) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$;

в) $\dfrac{z}{4-2i}=5-4i$; г) $z+2\overline{z}=3+2i$;

д) $|z|-z=1+2i$; ђ) $|z+1|+z+i=0$.

95. а) Доказати да је $z+\dfrac{1}{\overline{z}}-\left(\overline{\dfrac{1+z}{z}}\right)=z-1$, $z\neq 0$.

б) Ако је $f(z)=\dfrac{7-z}{1-z^2}$, где је $z=1+2i$, доказати да је $|z|=2|f(z)|$.

96. Одредити комплексни број z ако је $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а $|z|=\sqrt{3}$.

97. Одредити реалне вредности x и y за које су комплексни бројеви $z_1=y^2-7y+9xi$ и $z_2=-12+20i+x^2i$ једнаки.

98. Одредити реалне вредности x и y за које су комплексни бројеви $z_1=8x^2-20i^9$ и $z_2=9x^2-4+10yi^3$ конјуговано комплексни.

99. Дати су комплексни бројеви $z_1=3+2i$, $z_2=2+i$. Одредити комплексан број $z=x+iy$, ако је:

а) $\mathrm{Re}(z\overline{z_1})=-1$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{z_2}\right)=\dfrac{3}{5}$; б) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z_z}\right)=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{Im}(z\overline{z_1})=-1$.

100. Одредити све комплексне бројеве z за које је:

а) $\mathrm{Re}(z^2)=0$; б) $\mathrm{Im}(z^2)=0$; в) $|z|^2+z=0$;

г) $z^2+|\overline{z}|=0$; д) $z^2+|z|=0$; ђ) $|z+i|=|z+2|$.

е) $|z-2|=|z+2i|$; ж) $\left|\dfrac{z-2}{z+3}\right|=1$; з) $\left|\dfrac{z+3}{1-\overline{z}}\right|=1$.

101. Доказати:

а) $\overline{(-z)}=-\overline{z}$; б) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

в) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$; г) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

д) $\overline{z^{-1}}=\overline{z}^{-1}$; ђ) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $(z_2\neq 0)$.

102. а) Доказати да је $z=\overline{z}$ ако и само ако је z реалан број.

б) Доказати да су бројеви $z+\overline{z}$ и $z\cdot\overline{z}$ реални.

103. Показати да је:

а) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$; б) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; в) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

104. Доказати да за комплексне бројеве z_1 и z_2 важи

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

105. Одредити све комплексне бројеве z који задовољавају систем једначина:

а) $|z+i| = |z+2|$, $|z-2| = |z+2i|$;

б) $|z-i| = |z+3i|$, $|z| = |z-3-i|$;

в) $|z-2| = |z+3| = |z+2i|$.

106. Одредити све комплексне бројеве $z = a + bi$, ако је $z^4 = -7 - 24i$.

107. Наћи све комплексне бројеве z који имају својство да бројеви z, $1/z$ и $1-z$ имају једнаке модуле.

108. Наћи све комплексне бројеве $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) који су конјуговани свом квадрату (тј. за које важи једнакост $\overline{z} = z^2$).

109. Ако су $a + ib$, $c + id$ (a, b, c, d реални бројеви, i имагинарна јединица) решења једначине $z^2 = -15 - 8i$, израчунати $abcd$.

110. Наћи реалне вредности x за које је број $(x - 2 - i)^2$ чисто имагинаран.

111. За сваки природан број k је $(1+i)^{4k}$ реалан, а $(1-i)^{4k+2}$ чисто имагинаран број. Доказати.

112. Ако је z комплексан број различит од 1 и -1 доказати да је $\dfrac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран ако и само ако је $|z| = 1$.

1.4. Додатак уз прву главу

113. Доказати да важе следеће једнакости:

а) $\dfrac{25 \cdot \sqrt[4]{2} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{250} + 5\sqrt[4]{8}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{5} + \dfrac{5}{\sqrt{2}} + 2} = -1$;

б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{27} + \sqrt{\sqrt{3} - 1}} - \sqrt{\sqrt[4]{27} - \sqrt{\sqrt{3} - 1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27} - \sqrt{2\sqrt{3} + 1}}} = \sqrt{2}$.

Раставити на чиниоце (задаци 114–115):

114. а) $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{xy^3} - \sqrt[3]{x^3y} - \sqrt[3]{y^4}$; б) $(x-1)\sqrt{x} - (y-1)\sqrt{y}$, $x, y \geq 0$;

в) $(1+x)^{3/2} - 2x - (1-x)^{3/2}$, $|x| \leq 1$.

115. $\sqrt[3]{a^2b^4} + \sqrt[3]{b^2c^4} + \sqrt[3]{c^2a^4} - \left(\sqrt[3]{b^4c^2} + \sqrt[3]{c^4a^2} + \sqrt[3]{a^4b^2}\right)$.

116. Ако је a реалан број различит од нуле, доказати да израз

$$A = a^{-1}(1 + a^{-2})^{-0,5}(1 + a^2)^{0,5}$$

може имати само две вредности.

117. Ако је $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$, израчунати $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$.

118. Упростити израз $\left\{\dfrac{1 + x^{1/2}y^{1/2}(x^3 + y^6)^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}[1 - xy(x^3 + y^6)]}\right\}^{-1}$, $x, y > 0$.

Рационалисати imениоце разломака (задаци 119–120):

119. а) $\dfrac{1}{\sqrt{10} - \sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2}$; б) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{5}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$, $n \in \mathbf{N}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}}$; ђ) $\dfrac{1}{(5 - \sqrt{3})^5}$.

е) $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$, где је $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$, $a, b, c, x, y, z > 0$;

ж) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} - 2\sqrt[3]{a^3b}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}}$, $a, b > 0$, $a \neq b$.

120. а) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{5}}$; б) $\dfrac{7}{1 + \sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$.

121. Израчунати $x^3 + 3x - 14$, ако је $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}}$.

122. Доказати да је

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a^2 - 4}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^2 - 4}{a}}} = \frac{\sqrt{2a + 4}}{\sqrt[4]{a}}, \ a > 0.$$

123. Разлика $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ је цео број. Наћи тај број.

124. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1} + (2n-1)\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

125. Дати су бројеви: $a = \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, $b = \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Показати да је: $a \cdot b = 2(\sqrt{5} - 1)$, $a + b = \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$.

126. Доказати да се израз

$$\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2} \qquad (x>2)$$

може трансформисати у $\dfrac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$.

127. Израчунати ($a>0$, $b>0$, $a\neq b$):

а) $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/mn}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$, $a\neq 1$, $m\neq n$, $m,n\in\mathbf{N}$;

б) $\dfrac{(a^{\frac{2}{m}}-9a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{1-m}}-3\sqrt[n]{a^{1-n}})}{(a^{\frac{1}{m}}+3a^{\frac{1}{n}})^2-12a^{\frac{m+n}{mn}}}$, $m,n\in\mathbf{N}$, $\sqrt[m]{a}\neq 3\sqrt[n]{a}$;

в) $\left[\dfrac{(a^{\frac{2}{m}}+a^{\frac{2}{n}})^2-4a^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}}}{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})^2+4a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{2}}$, $m,n\in\mathbf{N}$.

128. Наћи вредност израза:

а) $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$ ако је $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$, $0<a<b<2a$;

б) $\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}})$ за $x=\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$.

129. Одредити α тако да је

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right)^{-2}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha},$$

при чему је $x=a\sqrt{\dfrac{m^2+n^2}{2mn}}$, $a>0, m>0, n>m$.

130. Ако је $A_m=\dfrac{a^m+a^{-m}}{2}$, $B_m=\dfrac{a^m-a^{-m}}{2}$, $a\neq 0$, доказати да је $A_m^2-B_m^2=1$, а затим одредити $A_mB_n+A_nB_m$ и $A_mA_n+B_mB_n$.

131. Одредити вредност израза $A=(1+x^{-1})^{-2}+(1-x^{-1})^{-2}$ ако је:

а) $x=(1-n^{-1})^{1/2}\cdot(1+n^{-1})^{-1/2}$, $|n|>1$;

б) $x=(1-n^{-1})^{1/2}\cdot(1+n^{-1})^{1/2}$, $|n|>1$;

в) $x=(1-n^{-1})^{-1/2}\cdot(1+n^{-1})^{-1/2}$, $|n|>1$.

132. Доказати да је:

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\begin{cases}2, & 1\leq x\leq 2\\ 2\sqrt{x-1}, & x>2;\end{cases}$

б) $\sqrt{2}(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$,
ако је $a>0$, $b>0$, $a>b$;

в) $\sqrt{\dfrac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+3\sqrt{b}}-2\sqrt{b}}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$, $a,b>0$.

133. Ако је $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, онда је $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. Доказати.

134. а) Наћи услов да се израз $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ може написати у облику израза $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, где су x, y, z позитивни рационални бројеви.

б) Представити израз $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}$ у облику збира три корена.

135. Одредити интервал у коме је функција $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$, константа.

136. Доказати да је $x^2+1=0$ ако и само ако је $x=i$ или $x=-i$ (у скупу комплексних бројева).

137. Одредити све комплексне бројеве $z=a+ib$, тако да је:

а) $z^2=i$; б) $z^2=-i$; в) $z^2=5+12i$; г) $z^2=15-8i$;

д) $z^2=11-60i$; ђ) $z^2=1-xy+2\sqrt{xy}i$ ($x,y\in\mathbf{R}$, $xy>0$);

е) $z^2=\dfrac{x^4-y^4}{x^2y^2}+2i$ ($x,y\in\mathbf{R}$, $xy\neq 0$).

138. Показати да је:

а) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$; б) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$.

139. Доказати да је:

а) $|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)$;

б) $|z_1\overline{z_2}-1|^2-|z_1-z_2|^2=(|z_1|^2-1)(|z_2|^2-1)$.

140. Одредити модул комплексног броја:

$$z=\frac{(1+i)^{200}(6+2i)-(1-i)^{198}(3-i)}{(1+i)^{196}(23-7i)+(1-i)^{194}(10+2i)}.$$

141. Ако је $(x+yi)^2=a+bi$, доказати да је $(x-yi)^2=a-bi$.

142. Ако је $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}$, тада је $f(n+4)=-f(n)$. Доказати.

143. Нека је $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$. Одредити $f(2002)+f(2006)$.

144. Одредити $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$ комплексног броја $z=\left(\dfrac{i-1}{i+1}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}$.

145. Ако је $z = a + bi$, доказати $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a| + |b|) \leq |z| \leq |a| + |b|$.

146. а) Ако је $1 + z + z^2 = 0$, доказати да је $z^3 = 1$.
б) Ако је $x^2 + x + 1 = 0$, доказати да је $x^{1000} + x^{-1000} = -1$.
в) Ако је $z + \frac{1}{z} = 1$, израчунати z^3, а затим $z^{1000} + \frac{1}{z^{1000}}$;
г) Ако је $1 + z + z^2 = 0$, израчунати $(z - z^2 + 2z^3)(2 - z + z^2)$;
д) Ако је $1 + z + z^2 = 0$, доказати да је $(az^2 + bz)(bz^2 + az) = a^2 - ab + b^2$.
ђ) Ако је $1 + z + z^2 = 0$, доказати да је $(a + b + c)(a + bz + cz^2)(a + bz^2 + cz) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

147. Нека су a, b, c комплексни бројеви модула 1. Доказати да је $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Глава II

КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА И КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

2.1. Квадратна једначина

Квадратна једначина је једначина облика

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

1° Једначина $ax^2 = 0$ еквивалентна је са једначином $x = 0$.

2° Једначина $ax^2 + c = 0$ еквивалентна је са дисјункцијом

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \text{или} \qquad x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3° Једначина $ax^2 + bx = 0$ еквивалентна је са дисјункцијом

$$x = 0 \qquad \text{или} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

4° Једначина $ax^2 + bx + c = 0$ еквивалентна је са дисјункцијом

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{или} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

5° Ако једначина има облик $ax^2 + 2mx + c = 0$, њена решења су

$$x_{1/2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}.$$

6° Ако једначина има облик $x^2 + 2mx + c = 0$, решења су

$$x_{1/2} = -m \pm \sqrt{m^2 - c}.$$

2.2. Одређивање природе и знака решења квадратне једначине

Природа решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, може се одредити у зависности од знака реалних коефицијената a, b, c и дискриминанте $D = b^2 - 4ac$.

При одређивању природе и знака решења узимамо да је $a > 0$.

1° Једначина има два различита реална решења ако и само ако је $D > 0$.

— Ако је $c > 0$ решења су истог знака, супротног од знака коефицијента b.

— Ако је $c < 0$ решења су супротног знака, а оно од решења чија је апсолутна вредност већа је супротног знака од знака коефицијента b.

2° Једначина има једно двоструко реално решење ако и само ако је $D = 0$.

3° Једначина има један пар конјугованих комплексних решења ако и само ако је $D < 0$.

2.3. Виетове формуле

Између решења x_1 и x_2 квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c, \in \mathbf{R}$ и њених коефицијената постоје релације:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

које се зову Виетове формуле.

2.4. Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце

Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$, тада је

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

односно дата једначина еквивалентна је једначини

$$x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

148. Користећи став о еквивалентним једначинама, решити једначине:
а) $(x+1)(x-2)=0$;
б) $(x-1)(x-2)(x+3)=0$;
в) $(x+2)(2x-1)=(x+2)(x+5)$;
г) $(x-1)(3x+5)-(1-x)(2x+5)=0$;
д) $(a-2)^2=16$;
ђ) $(2b-1)^2=4$.

Решити једначине (задаци 149–152):

149. а) $x^2-2x=0$;
б) $x^2+3x=0$;
в) $2x^2-3x=0$;
г) $5x^2+9x=0$;
д) $\frac{1}{2}x^2+4x=0$;
ђ) $\frac{3}{7}x^2-\frac{1}{6}x=0$.
е) $\sqrt{2}x^2+2x=0$;
ж) $x^2-\sqrt{3}x=0$.

150. а) $4x^2-121=0$;
б) $\frac{1}{5}x^2=5$;
в) $x-\frac{31}{x}=0$;
г) $\frac{2}{5}x^2+\frac{5}{2}=0$;
д) $(4x-6)(4x+6)=13$.

151. а) $(x-1)^2+(x-3)^2=(x-4)^2$;
б) $(5x-3)(5x+3)-(3x+5)(3x-5)=0$;
в) $(x-5)(x-4)=9(4-x)$;
г) $(x-3)(2x-3)+(5x+9)x-23=0$.

152. а) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}=0$;
б) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{9}{4}$;
в) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}$;
г) $x-\dfrac{x+10}{x+3}=2$.

153. Решити квадратне једначине $(a, b, m, n \in \mathbf{R})$:
а) $mx^2+x=0$;
б) $(a+b)x^2+(a-b)x=0$;
в) $(x+m)^2+(x+n)^2=m^2+n^2$;
г) $(2x-a)^2+(b-2x)^2=a^2+b^2$.

154. За коју вредност реалног параметра m квадратна једначина прелази у облик $ax^2+c=0$:
а) $x^2+(m+1)x+m=0$;
б) $x^2-mx+m-2=0$;
в) $mx^2+3(m-2)x+2=0$;
г) $x^2-(m-3)x+m=0$?

155. За коју вредност реалног параметра k квадратна једначина прелази у облик $ax^2+bx=0$:
а) $kx^2+x-k+3=0$;
б) $x^2+kx+k-1=0$;
в) $(k-1)x^2-x+k=0$;
г) $x^2+x+2k-4=0$?

Решити једначине (задаци 156–159):

156. а) $x^2-9x+14=0$;
б) $3x^2-10x+3=0$;
в) $x^2-6x+8=0$;
г) $x^2-2x+2=0$;
д) $16x^2-\frac{32}{3}x+\frac{5}{3}=0$;
ђ) $0{,}9x^2+1{,}8x-2{,}7=0$;
е) $25x^2+20\sqrt{3}x+61=0$;
ж) $x^2-2\sqrt{2}\,x+3=0$.

157. а) $(x+9)^2-(x+8)^2=(2x+11)^2$; б) $(3-x)^2+(20+4x)^2=(x+15)^2$;
в) $(5x-2)(8x-1)-9=(3x+1)(4x-1)$;
г) $(3x-4)^2+(2x+1)^2-(3x-2)^2=(x-1)(x+11)$.

158. а) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$; б) $\dfrac{3x}{x-1}+\dfrac{4x}{x+1}=\dfrac{2x^2-6x}{x^2-1}$;
в) $\dfrac{2x-3}{24x^2+36x}+\dfrac{2}{4x^2-9}=\dfrac{4-x}{12x^2-18x}$; г) $1+\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x+2}{x(x+2)}$;
д) $2+\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{4x+3}{2x+1}$; ђ) $\dfrac{2x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{2x+1}=\dfrac{5x+4}{(x-1)(2x+1)}$.

159. $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1}$.

160. За које вредности реалног броја p су решења једначине супротна:
а) $x^2+3(p^2-1)x-p-3=0$; б) $x^2-2(p+3)x+p-13=0$.

161. Решити једначине:
а) $2x^2-5x-3|x-2|=0$; б) $2x^2-|5x-2|=0$;
в) $x^2-|x-1|=0$; г) $x^2+|x|-2=0$;
д) $|x^2-|x-1||=1$; ђ) $|x^2-4|x|+3|=x+3$;
е) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$; ж) $|x^2-1|-|x|+|2x+3|=4x-6$.

162. Не решавајући једначине одредити природу решења датих једначина:
а) $3x^2-10x+3=0$; б) $x^2+12x-13=0$;
в) $x^2-6x+9=0$; г) $x^2-4x+5=0$.

163. Не решавајући једначине
а) $x^2-20x+64=0$; б) $2x^2+x-3=0$; в) $9x^2-12x+4=0$
одредити природу и знаке решења.

164. За које вредности реалног параметра m су решења квадратне једначине $(m+2)x^2+4x-1=0$: 1° реална и различита; 2° реална и једнака; 3° конјуговано-комплексна?

165. Испитати природу решења квадратних једначина у зависности од реалних параметара a, k, m:
а) $x^2+3x+m=0$; б) $ax^2-5x+6=0$;
в) $mx^2+(2m+5)x+m=0$; г) $4x^2+8x+m+4=0$;
д) $2kx^2+3x-1=0$; ђ) $5m^4x^2-6m^2x+2=0$.

166. За које вредности реалног параметра m квадратне једначине имају двострука реална решења:
а) $x^2-(m+1)x+2m-1=0$; б) $(2m+1)x^2-(m+2)x+m-3=0$?

167. У квадратној једначини $(5k-1)x^2-(5k+2)x+3k-2=0$ одредите параметар $k\in\mathbf{R}$ тако да решења буду двострука.

168. У једначини $x^2-7x+2m-4=0$ одредити вредности реалног параметра m за које ће једначина имати: 1° оба решења позитивна, 2° реална решења супротног знака.

169. Одредити природу и знаке решења једначине $x^2-2x+m-3=0$, где је $m\in\mathbf{R}$.

170. Саставити бар једну квадратну једначину чија су решења:
а) $x_1=2,\ x_2=5$; б) $x_1=-6,\ x_2=-1$;
в) $x_1=-1,\ x_2=3$; г) $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}$;
д) $x_1=0{,}2,\ x_2=0{,}8$; ђ) $x_1=2{,}3,\ x_2=-0{,}5$;
е) $x_1=2+\sqrt{3},\ x_2=2-\sqrt{3}$; ж) $x_1=1+2i,\ x_2=1-2i$;
з) $x_1=2+i\sqrt{3},\ x_2=2-i\sqrt{3}$; и) $x_1=m-2,\ x_2=m+2$.

171. Да ли су комплексни бројеви $\dfrac{a+bi}{a-bi}$, $\dfrac{a-bi}{a+bi}$ решења једне квадратне једначине са реалним коефицијентима?

172. У квадратној једначини $ax^2+bx+c=0$ одредити помоћу Виетових формула:
а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$; в) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; г) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$.

173. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-x-2=0$. Не решавајући једначину одредити: а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$; в) $x_1^4+x_2^4$.

174. У једначини $x^2-7x+m-1=0$ одредити реалан број m ако је $x_1=x_2+3$.

175. У једначини $x^2-8x+q=0$ одредити реално q ако је $x_1=3x_2$.

176. За које је вредности реалног броја m једно решење квадратне једначине $(m-3)x^2-(m+4)x+3m=0$ три пута веће од другог?

177. У једначини $x^2-(2m+1)x+5m-4=0$ одредити реалан параметар m ако између решења важи релација $4x_2-x_1=10$.

178. У једначини $x^2+px+12=0$, одредити реалан број p ако је разлика решења дате једначине једнака један.

179. У квадратној једначини $(11-m^2)x^2+2(m+1)x-1=0$ одредити реалан параметар m тако да решења задовољавају релацију $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=6$.

180. У квадратној једначини $3kx^2-(6k-1)x+k+8=0$, одредити k тако да једно решење буде реципрочна вредност другог решења.

У датим једначинама одредити реални параметар m тако да решења једначине задовољавају дате релације (задаци 181–183):

181. $x^2-3mx+m^2=0$, $x_1^2+x_2^2=112$.

182. $x^2-5x+m-4=0$, $x_1^2+x_2^2=13$.

183. $(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0,\ x_1^2+x_2^2=\frac{10}{9}$.

184. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-5x+c=0$, одредити реалан параметар c тако да је:

а) $x_1=2x_2$; б) $x_2=\frac{1}{x_1}$; в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=8$;

г) $x_1^2+x_2^2=15$; д) $x_1+2x_2=7$.

185. Применом Виетових формула одредити вредност реалног параметра m тако да решења једначине $x^2-2(m-1)x-4m=0$ буду негативна.

186. Применом Виетових формула одредити вредности реалног параметра m за које ће решења једначине $x^2-4x+2(m-3)=0$ бити позитивна.

187. Применом Виетових формула показати да су решења једначине $x^2-2(k+2)x+k^2+4=0$, где је $k\in\mathbf{R}$, ако су реална, увек позитивни бројеви.

Скратити разломке (задаци 188–189):

188. а) $\frac{2x^2-7x+3}{2x^2+3x-2}$; б) $\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}$; в) $\frac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+8x+4}$.

189. а) $\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}$; б) $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; в) $\frac{x^3-1}{x^2-6x+5}$.

190. Број 21 раставити на два сабирка тако да збир квадрата тих делова буде 261.

191. Производ половине и осамнаестине неког броја једнак је 1. Који је то број?

192. Наћи три узастопна цела броја чији је збир квадрата једнак 110.

193. Збир квадрата три узастопна парна броја једнак је 200. Одредити те бројеве.

194. Разлика кубова два узастопна природна броја једнака је: а) 91; б) 13669; в) 547. Који су то бројеви?

195. Наћи два броја чија је разлика 11, а производ -24.

196. У једначинама:

а) $x^2+kx+1=0$ и $x^2+x+k=0$;
б) $x^2-(k+2)x+6=0$ и $x^2-(2k+1)x+10=0$;
в) $x^2-3x+k-2=0$ и $x^2-4x+2k-1=0$

одредити параметар k тако да једначине имају заједничко решење.

197. Одредити вредност реалног параметра p тако да једначине $x^2+(p-8)x+2(p-4)=0$ и $x^2+(2p-19)x+2(2p-3)=0$ имају заједничко решење.

198. У једначини $4x^2+(m+1)x+m+1=0$ одредити вредност реалног параметра m ако је коефицијент уз x геометријска средина коефицијента уз x^2 и слободног члана.

Решити квадратне једначине, где су m, n, a, b реални параметри (задаци 199–204):

199. а) $mx^2-(m+n)x+n=0$; б) $(a^2-b^2)x^2+2ax+1=0$;
в) $x^2-2bx+b^2-a=0$; г) $x^2-2m^2x+m^4-n^4=0$;
д) $x^2-2ax+a^2+b^2=0$; ђ) $4x^2-4ax+a^2+1=0$.

200. а) $\frac{a+4b}{x+2b}-\frac{a-4b}{x-2b}=\frac{4b}{a}$; б) $\frac{m+x}{m-x}-\frac{x-m}{x+m}=\frac{2mx}{m^2-x^2}$;
в) $\frac{2x+m}{x}-\frac{2x}{x+m}=2$; г) $\frac{1}{2x+a}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{a}=0$;
д) $\frac{m^2}{4(x^2-m^2)}+\frac{x}{m-x}=\frac{2x}{x+m}$.

201. $1-\frac{2b}{x-a}=\frac{a^2-b^2}{a^2-2ax+x^2}$.

202. $\frac{2}{x+a}-\frac{b-1}{bx}=\frac{1}{bx-b^2}+\frac{1}{bx-x^2}$.

203. $\frac{a}{bx-x}-\frac{a-1}{x^2-2bx^2+x^2b^2}=1$.

204. $\frac{mx^2-1}{(mx-1)^2}-\frac{(m-1)x^2}{m^3x^2-m(2mx-1)}=\frac{1}{m}$.

205. Доказати да решења једначина припадају скупу реалних бројева:

а) $\frac{1}{x+p}+\frac{1}{x}=\frac{1}{q}$; б) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}$ $(p,q,a,b,c\in\mathbf{R},\ q\neq 0,\ c\neq 0)$.

206. Доказати да за квадратну једначину $ax^2+bx+c=0$ важе релације:

а) $x_2^2-x_1^2=-\frac{b}{a^2}\sqrt{b^2-4ac}$; б) $x_2^3-x_1^3=\frac{b^2-ac}{a^3}\sqrt{b^2-4ac}$.

207. Не решавајући једначину $x^2+4x-21=0$ одредити вредност израза

$$\frac{3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2}{x_1^3+2x_1^2x_2+2x_1x_2^2+x_2^3}.$$

208. Не решавајући једначину $x^2-8x+15=0$ одредити вредност израза

$$\frac{7x_1^2-5x_1x_2+7x_2^2}{x_1^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2-x_2^3},\quad x_1>x_2.$$

209. Одредити вредност параметра a тако да корени једначине $x^2-x+a-2=0$ задовољавају услов

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}x_1x_2+4=0.$$

210. У једначини $3x^2-2(m+1)x+m-1=0$ одредити реалан број m ако је $9x_1x_2^2+3x_1^3+9x_1^2x_2+3x_2^3=192$.

211. У једначини $x^2+px+q=0$ одредити релацију између реалних параметара p и q ако њена решења задовољавају једнакост $3x_1-2x_2=15$.

212. У једначини $4x^2-15x+4k^2=0$ одредити вредност реалног параметра k тако да једно решење једначине буде квадрат другог.

У датим једначинама одредити реални параметар m тако да решења једначине задовољавају дате релације (задаци 213–214):

213. $x^2-x+m-1=0$, $x_1^3+x_2^3=7$.

214. $(m-1)x^2+(m+1)x+m+1=0$, $x_1^3+x_2^3=x_1^2x_2^2$.

215. Решења квадратне једначине $x^2-(p-2)x+3=0$ $(p\in\mathbf{R})$ задовољавају услов $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>1$ ако и само ако је $p>5$. Доказати.

216. Дата је једначина $y^2-py+q=0$. Саставити једначину по x ако је $y_1=2x_1$, $y_2=2x_2$.

217. За дату квадратну једначину одредити релацију између њених решења у којој не учествује параметар m:

а) $mx^2+(2m+1)x+m-3=0$; б) $(3m+2)x^2+(4m+5)x+7m=0$.

218. Дата је квадратна једначина $ax^2+bx+c=0$ чија су решења x_1 и x_2. Формирати нову квадратну једначину чија ће решења бити $-x_1$ и $-x_2$.

219. Написати квадратну једначину чија су решења $x_1=\dfrac{p}{q}$ и $x_2=\dfrac{q}{p}$, ако су p и q реални параметри и $pq\neq 0$.

220. Саставити квадратну једначину чија су решења реципрочна решењима једначине $ax^2+bx+c=0$, $a,c\neq 0$.

221. Одредити вредности реалних бројева m и n за које једначине

а) $(m-1)x^2-(m+1)x+m=0$ и $nx^2-(2n+2)x+2n=0$;

б) $x^2-6x+8=0$ и $(2m-n)x^2-(m+4)x+4n-2m=0$

имају оба решења заједничка.

222. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-px-p+1=0$, одредити реалан параметар p тако да збир квадрата решења једначине буде најмањи.

223. У једначини $x^2-4mx+5m^2-6m+5=0$ одредити m тако да разлика корена буде највећа.

224. Саставити квадратну једначину чија решења x_1 и x_2 задовољавају релације:

а) $3x_1x_2-4(x_1+x_2)=-2$ и $7x_1x_2+3(x_1+x_2)=57$;

б) $4x_1x_2-5(x_1+x_2)+4=0$ и $(x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{1}{6}$.

225. Дата је једначина $x^2-8x+12=0$. Саставити једначину са решењима $x_1+\dfrac{1}{x_1}$ и $x_2+\dfrac{1}{x_2}$ не решавајући дату једначину.

226. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+px+q=0$, како гласи једначина чија су решења $\dfrac{x_1+1}{x_1}$ и $\dfrac{x_2+1}{x_2}$?

227. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-8x+2=0$. Саставити квадратну једначину чија су решења $\dfrac{1}{x_1^2}$ и $\dfrac{1}{x_2^2}$.

228. Дата је једначина $\dfrac{1}{x-m}+\dfrac{1}{x-2m}=1$, где је m реалан параметар и $(x-m)(x-2m)\neq 0$. Доказати да су решења x_1 и x_2 те једначине реални бројеви за свако $m\in\mathbf{R}$.

229. Одредити реалне коефицијенте p и q једначине $x^2+px-q=0$ тако да они буду и решења једначине.

230. Применом Виетових формула испитати природу и знак решења квадратне једначине $mx^2+2(m-6)x+m-3=0$, $m\in\mathbf{R}$, $m\neq 0$.

231. Фабрика се обавезала да трговини испоручи за одређено време 600 комада једног производа. Повећањем продуктивности рада фабрика је успела да израђује дневно 10 комада више тог производа, због чега је испоруку извршила 3 дана раније. Колико је комада тог производа фабрика израђивала дневно и колико је било повећање продуктивности рада?

232. Базен са водом се пуни кроз ширу цев за време које је 5 часова краће од времена пуњења кроз ужу цев. Кроз обе цеви се пуни за 6 часова. За које време ће се базен напунити кроз сваку од цеви посебно?

233. Два теретна воза, удаљена 300 km, крећу један другоме у сусрет. Први воз има брзину за 5 km/h већу од брзине другог воза, због чега му је потребно за 7 часова краће време да пређе половину пута, него другоме да пређе цео пут од 300 km. Израчунати брзине оба воза и време кретања.

234. Возач B прелази својим колима 20 km на час више него возач A и зато је прешао пут од 480 km за 2 часа пре него возач A, који је пошао у исто време кад и возач B. Којом је брзином возио возач A?

235. Удаљеност два града је 588 km. Брзи воз пређе ту удаљеност за 2 сата и 20 минута, пре него путнички. Колика је брзина сваког од ових возова ако се њихове брзине разликују за 21 km/h?

236. По кружници чији је обим 1000 m креће се материјална тачка M константном брзином. Ако се брзина тачке смањи за 5 m/s, време за које тачка M обиђе једанпут кружницу повећа се за 10 секунди. Којом се брзином креће тачка M по кружници?

237. Постоји ли правоугли троугао чије су дужине страница три узастопна природна броја?

238. Дужина хипотенузе правоуглог троугла је c, а збир дужина његових катета износи k. Наћи дужине катета.

2.5. Неке једначине са једном непознатом које се своде на квадратне

239. Решити једначине (биквадратне једначине):

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

в) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; г) $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0$;

д) $x^4 - (25 + a^2)x^2 + 25a^2 = 0$; ђ) $x^4 - (9 + a^2)x^2 + 9a^2 = 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

240. Наћи реална решења једначина:

а) $x^6 + 3x^3 + 2 = 0$; б) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$;

в) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; г) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

241. Решити једначине:

а) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$; б) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$;

в) $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4$; г) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = \dfrac{9}{16}$;

д) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$; ђ) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$.

242. Решити једначине (симетричне једначине):

а) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

в) $6x^4 + 7x^3 - 26x^2 + 7x + 6 = 0$; г) $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$.

243. Решити једначине (симетричне једначине):

а) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$; б) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$;

в) $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$; г) $6x^5 - 5x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 5x + 6 = 0$;

д) $x^5 + 8{,}7x^4 + 22{,}7x^3 + 22{,}7x^2 + 8{,}7x + 1 = 0$.

244. Решити једначине (кососиметричне):

а) $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$;

б) $12x^5 - 23x^4 - 135x^3 + 135x^2 + 23x - 12 = 0$;

в) $7x^4 - 50x^3 + 50x - 7 = 0$;

г) $15x^6 - 128x^5 + 275x^4 - 275x^2 + 128x - 15 = 0$;

д) $3x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 10x - 3 = 0$.

245. Како гласи реципрочна једначина чија су решења:

а) $5, \frac{1}{5}, 3, \frac{1}{3}, -1, 1$; б) $-1, 1, 3, \frac{1}{3}, -i, i$.

246. Решити једначине:

а) $(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 6$; б) $(x + 2)(x - 3)(x - 1)(x + 6) = 40x^2$;

в) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 24$; г) $x^4 - 2x^3 + x - \dfrac{3}{4} = 0$.

247. Наћи реална решења једначине $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$, где је a реалан параметар.

248. а) У једначини $x^2 - (2m^2 - 1)x + 2(m^2 + 2) = 0$, чија су решења x_1 и x_2, одредити вредност реалног параметра m тако да је $x_2 - x_1 = 1$.

б) У једначини $x^2 - (m^2 - 2)x + m^2 + 1 = 0$ чија су решења x_1 и x_2 одредити $m \in \mathbf{R}$ ако је $x_2 - x_1 = 6$.

2.6. Квадратна функција

Квадратна функција је функција облика

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

Ако полином другог степена $ax^2 + bx + c$ сведемо на канонски облик, добијамо канонски облик квадратне функције

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ако је $a > 0$ функција има минимум $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ за $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Ако је $a < 0$ функција има максимум $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ за $x = -\dfrac{b}{2a}$.

249. Дата је функција $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Наћи:

а) $f(0)$; б) $f(1)$; в) $f(-1)$; г) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

250. Дата је функција $f(x) = x^2 + 5x + c$. Одредити $c \in \mathbf{R}$ ако је:

а) $f(0) = 2$; б) $f(1) = 4$; в) $f(-2) = -10$.

251. У квадратној функцији $f(x) = ax^2 + bx + c$ одредити коефицијенте a, b и c ако график функције пролази кроз тачке $A(2, 18)$, $B(-3, -12)$, $C(3, 42)$.

252. Дата је функција $f(x) = ax^2 + bx + c$. Одредити коефицијенте a, b и c ако је:

а) $f(-1) = 5$, $f(3) = 45$, $f(2) = 20$;

б) $f(-6) = 33$, $f(1) = 5$, $f(2) = 25$;

в) $f(-10) = -3$, $f(0) = 7$, $f(5) = \frac{9}{2}$.

253. У функцији $f(x) = x^2 + bx + c$ одредити коефицијенте b и c тако да она сече x-осу у тачкама $A(2, 0)$, $B(-3, 0)$.

254. Скицирати графике функција:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; в) $f(x) = 2x^2$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

255. Испитати функције и скицирати њихове графике:

а) $y = -x^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$; в) $y = \frac{1}{4}x^2 + 4$; г) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.

256. Скицирати графике функција:

а) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$; б) $y = -2(x-1)^2$; в) $y = 2(x+2)^2$; г) $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$.

257. Одредити екстремне вредности функција:

а) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$; б) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$;

в) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6$.

258. За коју вредност реалног параметра m функција $y = x^2 - mx + m + 1$ има минимум једнак -2?

259. У квадратној функцији $y = (m+2)x^2 + (1-m)x + m$ одредити реалан параметар m тако да функција има максимум за $x = 2$.

260. У функцији $y = x^2 - (k+1)x + k - 2$ одредити реалан параметар k тако фунција има: а) минимум за $x = 1$; б) минимум једнак -2.

261. Да ли функција $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$ има екстремну вредност у интервалу $(-1, 5)$?

262. Одредити реалан број x тако да разлика тог броја и његовог квадрата буде највећа.

263. Дате су функције $f_1(x) = x^2 - kx + k - 1$ и $f_2(x) = x^2 - 2x + k$. Одредити реалан параметар k тако да функције имају једнаке минимуме.

264. За које вредности x функција $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ има минимум?

265. Дате функције свести на канонски облик:

а) $y = 2x^2 - 8x + 7$; б) $y = 2x^2 - 8x + 8$; в) $y = -x^2 - 2x - 1$;
г) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$; д) $y = \frac{1}{2}x^2 + x$;
ђ) $y = -2x^2 + 4x + 6$; е) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$

и скицирати њихове графике.

Испитати функцију и скицирати њен график (задаци 266–267):

266. а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$;
в) $y = 2x^2 - x + 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 6$.

267. а) $y = -2x^2$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = x^2 + 4$;
г) $y = (x-2)^2$; д) $y = -(x+3)^2$; ђ) $y = x^2 - 2x + 3$;
е) $y = -2x^2 + 4x - 3$; ж) $y = 2x^2 - 5x + 4$; з) $y = -x^2 + 4x - 2$;
и) $y = -2x^2 - 8x - 8$; ј) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$; к) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$.

Скицирати графике функција (задаци 268–269):

268. а) $y = x^2 - |x|$; б) $y = |x^2 + x|$;
в) $y = -|x^2 - 2x|$; г) $y = |-x^2 + x| - x$.

269. а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = x^2 + 4|x| + 3$;
в) $y = |x|(x-2)$; г) $y = (3-x)|x+1|$.

270. У функцији $y = x^2 + px + q$ одредити вредности реалних параметара p и q тако да њен график пролази кроз тачке $M(2,-2)$ и $N(3,-2)$, а затим испитати ток и скицирати график функције.

271. У функцији $y = -x^2 + (m+3)x - 3m + 1$ одредити реалан параметар m тако да функција има максимум за $x = 3$, а затим испитати њен ток и скицирати график.

272. У функцији $f(x) = x^2 + px + q$ одредити коефицијенте p, q тако да график функције:
а) пролази кроз координатни почетак; б) сече y осу у тачки $(0,-2)$;
в) додирује x-осу у тачки $(4,0)$; г) сече x-осу у тачкама $A(-7,0)$; $B(\frac{1}{2},0)$.

273. Одредити све реалне бројеве p за које је квадратна функција $f(x) = (p^2 + 2p - 3)x^2 - 4px + p$ позитивна за све реалне вредности променљиве x.

274. Одредити параметар m тако да збир квадрата решења једначине:

а) $x^2 - mx + m - 1 = 0$; б) $x^2 - (2m-1)x - 4m - 3 = 0$

буде минималан.

275. За које вредности реалног параметра m функција $y = x^2 + m(m+1)x + 100$ додирује x-осу?

276. Доказати да функција $f(x) = (x-1)(x-3) + m(x-2)(x-4)$ има нуле у скупу $\mathbf{R}$ за све $m \in \mathbf{R}$, $m \neq -1$.

277. Под којим условом је квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ парна? Може ли она бити непарна функција?

278. Дате су функције: а) $y = x^2 - 2(m+1)x + 2m(m+2)$;
б) $f(x) = x^2 - (m-1)x + m - 2$; в) $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - 1$.
Наћи геометријско место њихових минимума за $m \in \mathbf{R}$.

279. Дат је скуп функција:

а) $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m,\ m \in \mathbf{R}$;
б) $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5,\ m \in \mathbf{R}$.

1° Одредити m тако да буде $f(x) < 0$ за све $x \in \mathbf{R}$.
2° Одредити геометријско место темена парабола $y = f(x)$.
3° Да ли постоји тачка која припада графицима свих функција датог скупа? Ако таква тачка постоји, одредити је.

280. Дата је квадратна функција $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m$. Одредити реалан параметар m тако да за све $x \in \mathbf{R}$ важи $f(x) < 0$. Затим наћи теме оне од тих парабола која пролази кроз тачку $A(-1, -7)$.

281. Разложити број k на два сабирка, тако да њихов производ буде највећи.

282. Тело је бачено вертикално у вис са почетном брзином c. Након колико времена оно достигне највећу висину?

283. У квадрат странице a уписати квадрат најмање површине.

284. Жица дужине $2s$, може се на више начина савити у облику правоугаоника. Који од тако добијених правоугаоника ограничава највећу површину?

285. У круг полупречника R уписати правоугаоник највеће површине.

286. Од свих правоуглих троуглова чији је збир катета једнак m, одредити онај код кога је: а) дужина хипотенузе најмања; б) површина највећа.

287. У троугао ABC уписати правоугаоник $MNPQ$ највеће површине, тако да је $M, N \in AB$; $P \in BC$, $Q \in AC$.

288. Дат је једнакокраки троугао основице a и висине h. Одредити на висини која одговара основици тачку за коју ће збир квадрата њених растојања од сва три темена бити најмањи.

2.7. Квадратне неједначине

289. Решити неједначину $2x^2 - 3x - 2 > 0$.

Решити неједначине (задаци 290–292):

290. а) $2x^2 + 5x > 0$; б) $x^2 - 3x - 4 < 0$; в) $2x^2 - x - 10 < 0$;
г) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$; д) $2x^2 + x - 6 \geq 0$; ђ) $2x^2 + x + 3 > 0$.

291. а) $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$; б) $\dfrac{x-1}{2x+1} > 1$; в) $\dfrac{3x-2}{x-4} < 2$.

292. а) $\dfrac{3x+7}{2-5x} > -1$; б) $\dfrac{1-x}{x} \leq \dfrac{2-x}{x-1}$;
в) $\dfrac{11x-10}{2x-1} > \dfrac{8x}{x+2}$; г) $\dfrac{3}{x^2-1} < -1$.

293. За које вредности реалног параметра m су квадратне неједнакости тачне за све $x \in \mathbf{R}$:

а) $(m+1)x^2 + 4x + 2m > 0$; б) $4(m-8)x^2 - 12x + m > 0$;
в) $x^2 - (m-3)x + m > 0$; г) $(2m^2 + m - 6)x^2 - 2m\sqrt{2}x + 1 > 0$;
д) $(m^2 - m - 2)x^2 + 2mx + 1 < 0$; ђ) $(m-1)x^2 - 2mx + 3m + 1 < 0$;
е) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 < 0$; ж) $x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$?

294. Решити системе неједначина:

а) $x^2 - 3x - 10 > 0,\ x^2 + 3x - 4 < 0$; б) $3x^2 + 2x + 1 > 0,\ 3x^2 + 2x - 1 > 0$;
в) $x^2 - 4 > 0,\ x^2 - 3x - 4 < 0$; г) $x^2 - x - 12 < 0,\ x^2 - 2x > 0$.

295. Решити неједначине:

а) $\dfrac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3$; б) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$;
в) $\dfrac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$; г) $\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 1$.

296. Решити неједначине у скупу целих бројева:

а) $\dfrac{15}{-x^2 + 3x + 4} > 1$; б) $\dfrac{x^2 - 4}{4x - x^2} > 0$;
в) $\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$; г) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} < 0$.

297. Решити неједначину $-2 < \dfrac{-x^2 + 5x - 7}{x - 4} \leq 1$.

298. Решити системе неједначина:

а) $3x - 2 < x^2 \leq 4x$; б) $-2 \leq x^2 - x - 2 \leq 4$;
в) $-1 \leq \dfrac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$; г) $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} < 2$;
д) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 1} < 1$; ђ) $0 \leq \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 6x + 9} \leq \dfrac{1}{2}$.

299. Одредити $x \in \mathbf{R}$ за које су дефинисане функције:

а) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$; б) $y = \sqrt{(x-3)(x+4)}$;
в) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 12}}$.

300. Дата је једначина $x^2 - ax + 1 = 0$. Одредити оне реалне вредности параметра a за које су решења конјуговано-комплексни бројеви.

301. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $2x^2 + 2ax + 5a - 6 = 0$ одредити реалан параметар a тако да је $x_1^2 + x_2^2 < 0$.

Решити неједначине (задаци 302–304):

302. а) $|x^2-5x+5|<1$; б) $|x^2+4x|\geq 1-2x$; в) $|x+x^{-1}-4|\leq 2$.

303. а) $|x^2-5x|<6$; б) $|x^2-6x+11|\geq 6$;
в) $\dfrac{x^2-4|x|+3}{x^2-4}<0$; г) $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$.

304. а) $\dfrac{|2x-3|+x}{x^2-3x+2}<1$; б) $\dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}\geq 2$.

305. За које вредности реалног параметра p једначина $(p-2)x^2-2px+p-1=0$ има оба корена позитивна?

306. У једначини $x^2-(m+1)x+m+4=0$ одредити реалан параметар m тако да оба решења једначине буду негативна.

307. Одредити вредности реалног параметра m тако да оба решења једначине $4x^2-4(m-2)x+m=0$ буду позитивна.

308. За које вредности реалног параметра m једначина $2x^2-(m^3+8m-1)x+m^2-4m=0$ има решења различитог знака?

309. У једначини $x^2+(m-2)x+1=0$ одредити реалан параметар m тако: 1° да решења буду реална, 2° да израз $x_1^2+x_2^2$ буде најмањи.

310. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $(m+1)x^2-(m-1)x+m=0$, одредити реалан параметар m тако да важи релација $x_1^2+x_2^2\geq 1$.

311. У једначини $x^2+2mx+3(m-2)=0$ одредити вредност реалног параметра m тако да једначина има реална решења x_1 и x_2 и да за њих важи релација $x_1^2+x_2^2+5(x_1+x_2)<0$.

За које вредности реалних параметра m и k решења x_1 и x_2 једначина задовољавају дате релације (задаци 312–315)

312. $x^2+(2m+2)x+m=0,\ \dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}>8$.

313. $x^2+(m+3)x+m+21=0,\ \dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}<1$.

314. $(k+2)x^2-2(k+3)x+k-1=0,\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\geq 1$.

315. $x^2+2mx+4=0,\ \dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}\leq 2$.

316. Наћи услов који морају испуњавати реални бројеви a и b да би постојала два реална броја x и y чији збир износи a, а производ b.

2.8. Системи квадратних једначина са две непознате

Решити системе једначина и дати одговарајућу геометријску интерпретацију (задаци 317–318):

317. а) $x^2-y-6=0,\ x^2+y-4x=0$; б) $x^2+2x-y=0,\ x^2+2x+y=0$.

318. а) $2x^2+2x-y-1=0,\ y-2x-1=0$; б) $2x^2+2x-y-1=0,\ y+2x+1=0$.

Решити следеће системе квадратних једначина (задаци 319–328):

319. а) $x+2y=7,\ xy=6$; б) $x+y=3,\ xy=2$;
в) $x+y=0,\ xy=-4$; г) $x+y=-2,\ xy=-3$.

320. а) $x^2+3xy+2y^2-4x-y+1=0,\ 2x+y-1=0$;
б) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{y+3}=1,\ 3x-2y-2=0$;
в) $\dfrac{2x-y}{x+y}+\dfrac{x+4y}{x^2-y^2}=3,\ x+y-3=0$.

321. а) $x^2+y^2-xy+x=5,\ x+2y=4$; б) $x^2+y^2=2(xy+2),\ x+y=6$.
в) $(x-1)(y-3)=-2,\ x+2y=7$; г) $x^2+y^2=25,\ x^2+2y^2=41$.

322. а) $5x^2-6y^2=111,\ 7x^2+3y^2=714$; б) $x+y^2=7,\ xy^2=12$.

323. а) $x^2-y=23,\ x^2y=50$; б) $x^2-xy+y^2=7,\ x+y=5$.

324. а) $(x-3)^2+y^2=2,\ x+y=3$; б) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{37}{6},\ x+y=\dfrac{21}{8}$.

325. а) $x^2y+xy^2=30,\ xy+x+y=11$; б) $x^2+xy+y^2=4,\ x+xy+y=2$.

326. а) $x^2+y^2=17,\ x+xy+y=9$; б) $x^2+y^2+xy=13,\ x+y+xy=7$.
в) $x+xy=55,\ y+xy=60$; г) $x^2+y^2+x+y=32,\ 12(x+y)=7xy$.

327. а) $2(x^2+y^2)-5(x+y)=1,\ 5xy-2(x+y)=20$;
б) $(x-y)^2+4(x-y)=21,\ xy=28$.
в) $x^2+y^2=8,\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3}{x^2}=13,\ \dfrac{1}{x^2y^2}=100,\ x,y\in\mathbf{R}$.

328. а) $x+y=\dfrac{3}{2}a,\ xy=\dfrac{1}{2}a^2,\ a\in\mathbf{R}$; б) $x^2+y^2=2a^2,\ xy=-a^2,\ a\in\mathbf{R}$;
в) $x^2+y^2=p^2+q^2,\ x+y=p+q,\ p,q\in\mathbf{R}$;
г) $\dfrac{a}{x+y}+\dfrac{b}{x-y}=1,\ x^2-y^2=4ab,\ a,b\in\mathbf{R}$.

329. Решити следеће системе од којих је бар једна хомогена једначина:
а) $x^2-4xy+3y^2=0,\ x+2y=5$; б) $3x^2-7xy+4y^2=0,\ 3x+y=10$;
в) $x^2-3xy+2y^2=0,\ x^2-3x-y+3=0$;

г) $x^2 + xy - 6y^2 = 0,\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 18;$
д) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0,\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 20.$

Решити системе једначина (задаци 330–332):

330. а) $x^2 + y^2 = 4,\ x - y = k,\ k \in \mathbf{R};$ б) $x^2 + y^2 = 25,\ 3x + 4y = m,\ m \in \mathbf{R};$
в) $x^2 + y^2 = 3x + 4y,\ x + y = k,\ k \in \mathbf{R};$
г) $x^2 = ay - 2,\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0,\ a \in \mathbf{R}.$

331. а) $|x + y| = 5,\ |xy| = 6;$ б) $|x^2 - 2x| + y = 1,\ x^2 + |y| = 1.$

332. а) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0,\ x^2 + 2xy + y - y^2 = 8;$
б) $x^2 - 7xy + 10y^2 = 0,\ x(x - y) + y(y + 4) = 10 + x.$

Решити следеће системе једначина које се своде на хомогене (задаци 333–334):

333. а) $x^2 + xy + y^2 = 19,\ x^2 - xy + y^2 = 7;$
б) $2x^2 - 3xy + y^2 = 12,\ x^2 + 3xy - 2y^2 = -13;$
в) $x^2 - xy + y^2 = 300,\ 2x^2 - xy - y^2 = 500;$
г) $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 22,\ 5x^2 - 8xy + 5y^2 = 50.$

334. $x^2 - 3xy + 4y^2 = 2,\ -3x^2 + xy + 5y^2 = -5.$

Решити следеће системе једначина у скупу реалних бројева (задаци 335–347):

335. $2x^2 - 3xy + 5y = 5,\ (x - 2)(y - 1) = 0.$

336. $y^2 - 1 = 4x^2 + 4x,\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1.$

337. $y + x^2 = 5,\ y^2 + x^4 = 17.$ **338.** $x^2 - xy + y^2 = 7,\ x^3 + y^3 = 35.$

339. $x^3 + y^3 = 9,\ x^2y + xy^2 = 6.$ **340.** $x^3 + y^3 = 2,\ xy(x + y) = 2.$

341. $x + y + x^2 + y^2 = 8,\ xy + x^2 + y^2 = 7.$

342. $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{26}{5},\ xy = 6.$ **343.** $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{9}{20},\ x^2 + y^2 = 82.$

344. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481,\ x^2 + xy + y^2 = 37.$

345. $x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2,\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y).$

346. $x^3 - y^3 = 19(x - y),\ x^3 + y^3 = 7(x + y).$

347. $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525,\ x + xy + xy^2 = 35.$

348. Ако се бројиоцу неког разломка дода, а имениоцу одузме 3 добија се реципрочна вредност разломка. Када се бројиоцу одузме, а именоцу дода 3, добија се број за $\frac{78}{55}$ мањи од реципрочне вредности. Који је то разломак?

349. Производ два броја је 180. Ако се сваки чинилац увећа за 3, производ постаје 270. Који су то бројеви?

350. Збир квадрата два броја је 400. Ако се први увећа за 6, други за 8, збир квадрата тада је 900. Који су то бројеви?

351. Двоцифрени број је три пута већи од збира својих цифара, а квадрат збира тих цифара је једнак троструком траженом броју. Одредити тај број.

352. Који је двоцифрени број једнак двоструком производу бројних вредности својих цифара и повећава се за 27 кад цифре промене своја места?

353. Обим једног врта облика правоугаоника износи 280 m. Дуж обима, са унутрашње стране, изграђена је алеја ширине 1 m. Преостали део обрадиве површине врта износи 3255 m^2. Колике су димензије врта?

354. Дате су тачке A и B тако да је $AB = 11$ cm. Одредити између тих тачака тачку M, тако да је збир квадрата конструисаног над дужи AM и квадрата конструисаног над дужи MB једнак 65 cm^2.

355. Збир дужина катета правоуглог троугла износи 17 m, а дужина хипотенузе је 13 m. Колика је површина троугла?

356. Места A и B су међусобно удаљена 315 km. Пут од места A до B и обрнуто, од B до A, аутомобилиста пређе укупно за 9 часова. На путу од A до B прелазио је просечно 24 km више него на путу до B до A. Колика је просечна брзина аутомобилисте у km на час кад се кретао од A до B, а колика кад се кретао у супротном смеру?

357. Површина правоуглог троугла је 6 dm^2. Ако се странице овог троугла узму за ивице једног правоуглог паралелепипеда, запремина тог паралелепипеда износиће 60 dm^3. Колике су странице правоуглог троугла?

358. Израчунати димензије пода облика правоугаоника чија је дијагонала d, а обим $2l$.

359. Који је двоцифрени број за 1 већи од збира квадрата бројних вредности својих цифара, а за 5 већи од двоструког производа бројних вредности тих цифара?

2.9. Ирационалне једначине и неједначине

Једначина, односно неједначина, у којој се непозната налази и под знаком корена назива се ирационална једначина, односно неједначина. Такве (не)једначине могу бити веома сложене и, за разлику од линеарних и квадратних (не)једначина, у општем случају се не могу решити.

Ипак, може се рећи да је основна метода за решавање ирационалних (не)једначина метода елиминације корена.

При решавању ирационалних (не)једначина ради се искључиво са реалним бројевима, па долазе у обзир само реална решења. Због тога, увек прво треба проверити да ли су дефинисани сви изрази који се појављују у једначини.

1° Један приступ решавању ирационалних једначина је такозвана „импликацијска метода“. Поћи ћемо од тога да важи

$$a(x) = b(x) \implies a^2(a) = b^2(x),$$

па, под претпоставком да је новодобијена једначина рационална и да је умемо решити, од свих њених решења провером утврдити која решења задовољавају полазну ирационалну једначину.

2° Када се скуп решења састоји из читавих интервала (што је свакако случај код неједначина, а и код неких једначина), немогуће је за све те бројеве „проверити“ да ли су они и решења полазне (не)једначине. Због тога је у таквим, а и у неким другим случајевима погоднија „еквиваленцијска“ метода за решавање ирационалних (не)једначина. Наиме,

$$\text{једначина } \sqrt{a(x)} = b(x) \text{ је еквивалентна}$$
$$\text{систему } a(x) = b^2(x) \wedge b(x) \geqslant 0.$$

3° Неједначина облика

$$\sqrt{a(x)} < b(x)$$

еквивалентна је систему неједначина

$$a(x) < b^2(x) \wedge a(x) \geqslant 0 \wedge b(x) > 0.$$

4° Неједначина облика

$$\sqrt{a(x)} > b(x)$$

еквивалентна је дисјункцији система неједначина

$$(a(x) > b^2(x) \wedge b(x) \geqslant 0) \vee (a(x) \geqslant 0 \wedge b(x) < 0).$$

360. Решити једначине:

а) $2\sqrt{x+5} = x+2$; б) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$;

в) $\sqrt{x+2} = x$; г) $\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1}$;

д) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$; ђ) $\sqrt{2x^2-x} = x-2$.

361. Доказати да следеће једначине немају решења:

а) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-5} + 3 = 0$; б) $\sqrt{x-5} + \sqrt{2-x} = 8$;

в) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2} = 1$; г) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{2-x} = 2$.

Решити једначине (задаци 362–369):

362. а) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$; б) $1-x = \sqrt{3x^2-7x+3}$;

в) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$; г) $\sqrt{2x+9} + \sqrt{3x+16} = 7$;

д) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-8}$; ђ) $\sqrt{4x+5} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$.

363. а) $\sqrt{a+x} + \sqrt{2a+x} = \dfrac{a}{\sqrt{a+x}}$, $a > 0$;

б) $$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}} : \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)\sqrt{x+1} - (x+1)\sqrt{x-1}} = 2.$$

364. а) $\sqrt{x^2+x-3} = 3$; б) $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$;

в) $3\sqrt{x^2-3x} = x+2$; г) $\sqrt{3x^2-20x+16} = x-4$.

365. а) $\sqrt{x^2-\sqrt{4x^2-11}} = x-1$; б) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-14x+22}} = 2$;

в) $\sqrt{x^2-2x-1+\sqrt{x+1}} = x-1$;

г) $\sqrt{x^2+2x+1-6\sqrt{x^2+2x-32}} = 5$;

д) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2(x+1)}$.

366. а) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$; б) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} = 0$;

в) $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$, $a \in \mathbf{R}$; г) $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$;

д) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$; ђ) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

367. а) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$; б) $\sqrt[4]{x+41} + \sqrt[4]{41-x} = 4$;

в) $\sqrt[4]{80+x} + \sqrt[4]{2-x} = 4$; г) $\sqrt[4]{36-x} + \sqrt[4]{x+61} = 5$.

368. $\sqrt[4]{(x-1)^2} - \sqrt[4]{(x+1)^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}$.

369. а) $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}} = \dfrac{5}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{3+x}}{3} + \dfrac{\sqrt[5]{3+x}}{x} = \dfrac{64}{3}\sqrt[5]{x}$.

Решити неједначине (задаци 370–375):

370. а) $\sqrt{x^2-5x+4} < x-3$; б) $\sqrt{x+5} < 1-x$;

в) $\sqrt{x^2-x-12} < x$; г) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$;

д) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$; ђ) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

371. а) $\sqrt{-x^2+x+6} > 1-x$; б) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$;

в) $\sqrt{x^2-9} > x-9$; г) $\sqrt{x^2-5x-14} > x-5$;

д) $\sqrt{x^2-x-12} > x-2$; ђ) $3\sqrt{-x^2+x+6} > 4x-2$.

372. а) $\sqrt{x^2-x-2} > 2$; б) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$;

в) $\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-1}} \leq \dfrac{3}{2}$; г) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x-2}} < 2$.

373. а) $\sqrt{x+7} > \frac{|x-5|}{4}$; б) $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{x+2} < 4-x$; г) $\sqrt{\frac{3x+1}{x^2+x-2}} < 1$.

374. а) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$; б) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} < 4$;

в) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$; г) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}$;

д) $\sqrt{7x-13} > \sqrt{3x-19} + \sqrt{5x-27}$; ђ) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} > \sqrt{4x-3}$.

375. а) $\sqrt{x^2+5x+5} > 1$; б) $\sqrt{x^2-x-1} < 1$;

в) $\sqrt{3x^2-5x-3} > \sqrt{2x+3}$; г) $\sqrt{3x^2-2x-1} \ge 2x-2$;

д) $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} > 3$; ђ) $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6$;

е) $x\sqrt{3x^2+5x-6} < x^2+2x$; ж) $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$.

376. Решити једначину $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 4$.

377. Наћи сва реална решења једначине

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Решити једначине (задаци 378–379):

378. а) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$; б) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - 2$;

в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

379. а) $\sqrt{2-x-x^2} - \sqrt{x^2+x-1} = 1$;

б) $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{x^2-6x+9}$;

в) $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-3-\sqrt{x-2}} = 1$;

г) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

2.10. Додатак уз другу главу

380. Решити једначину $\frac{(x-q)^2-(x-p)^2}{(x-p)(x-q)} = \frac{4pq}{p^2-q^2}$, у којој су $p, q \in \mathbf{R}$ и $|p| \neq |q|$.

381. Решити једначину $\frac{x^2+1}{n^2x-2n} - \frac{1}{2-nx} = \frac{x}{n}$, где је n реалан параметар.

382. За разне вредности реалног параметра a решити по непознатој x једначину $(a^2-5a+6)x = a-3$.

383. Решити једначине:

а) $|x^2-2x-3| = |x^2-2x+5|$; б) $|x^2+x-6| = x^2+x-6$;

в) $|6x^2-5x+1| = -6x^2+5x-1$; г) $|x^2+x| = x^2+x$.

384. У једначини $x^2+bx+1=0$ одредити реалан параметар b тако да: 1° једно решење буде реципрочна вредност другог, 2° решења добијене једначине буду реална.

385. За коју је вредност реалног параметра a збир кубова корена једначине $6x^2+6(a-1)x-5a+2a^2=0$ највећи?

386. Дата је једначина $x^2-2(a+1)x+3a+2=0$, где је a реалан параметар.

1° За коју вредност параметра a су решења реална?

2° Наћи везу између решења x_1 и x_2 која је независна од параметра a.

3° На основу те везе одредити решења дате једначине тако да она буду једнака.

4° Одредити вредност параметра a тако да збир решења дате једначине буде једнак збиру њихових кубова.

387. Ако су x_1 и x_2 корени једначине $x^2+px+q=0$, одредити p и q тако да x_1+1 и x_2+1 буду корени једначине $x^2-p^2x+pq=0$.

388. Дата је функција $f(x)=x^2+(k+2)x+2k$, k – реалан параметар.

а) Доказати да су за свако k корени једначине $f(x)=0$ реални.

б) Одредити k тако да једначина $f(x-k)-2x=0$ има решења $x_1=0$ и $x_2=7$. За тако одређену вредност k наћи минимум функције $f(x-k)-2x$.

389. Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$. Доказати: $x_1=x_2$ ако и само ако $b^2-4ac=0$.

390. Дата је једначина $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$, где је m реалан број.

1° Одредити m тако да је $x_1^2+x_2^2=k$.

2° За које вредности параметра k је m реалан број?

3° Нека су x_1, x_2 и x_1', x_2' два пара решења дате једначине и нека је $x_1^2+x_2^2 = x_1'^2+x_2'^2$. Показати да је $x_1x_2+x_1'x_2'=8$.

391. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-(m+1)x+m=0$ у којој је m реалан параметар. Написати нову квадратну једначину чија су решења:

$$x_2-x_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x_2-x_1}.$$

392. Ако је $x_1=2+5i$ једно решење једначине $x^2+px+q=0$ са реалним коефицијентима, одредити те коефицијенте и друго решење ове једначине.

393. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+px+q=0$, формирати квадратну једначину чија су решења $m=x_1^2$ и $n=x_2^2$.

394. Не решавајући квадратну једначину $x^2+px+q=0$ саставити квадратну једначину чије је једно решење једнако збиру кубова решења дате једначине, а друго решење кубу збира тих решења.

395. Наћи потребан и довољан услов да једно решење једначине $x^2+px+q=0$ буде једнако квадрату другог решења.

396. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $ax^2 + bx + c = 0$, како гласи једначина чија су решења $x_1 + m$ и $x_2 + m$?

397. Дата је једначина $4x^2 - 8x + 3 = 0$. Саставити квадратну једначину по непознатој y тако да решења нове једначине буду за по 3 већа од решења дате једначине.

398. За $m \in \mathbf{Z}$ одредити целобројна решења једначине
$(m-2)x^2 + (4m-6)x + 5m - 6 = 0$.

399. Дата је једначина $x^2 + (3a-1)x + a = 0$, где је a реалан параметар.

а) Изразити један корен дате једначине као функцију другог.

б) Наћи интервал у коме се мора налазити један од корена да би други био позитиван.

в) Наћи корене знајући да је један по апсолутној вредности шест пута већи од другог.

400. Доказати да једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$, $m \in \mathbf{R}$, ако су јој корени реални и различити, има тачно један корен у интервалу $(-2, 3)$.

401. Одредити реални параметар k тако да корени једначине $4x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$ припадају интервалу $(-3, 4)$.

402. За које вредности параметра a тачно један корен једначине
$(a+1)x^2 - (a^2 + a + 6)x + 6a = 0$ припада интервалу $(0, 1)$?

403. 1° Ако је $f(x) = 3x^2 - 5x + k^2 - 3k + \frac{49}{12}$, одредити вредности реалног параметра k тако да за свако реално x важи неједнакост $f(x) > 1$.

2° Доказати да за свако k функција $f(x)$ достиже минималну вредност за исто x.

3° Наћи k за које је минимална вредност функције једнака нули.

404. Одредити релацију независну од m међу коренима једначине $(x^2 - 6x + 5) + m(x^2 - 5x + 6) = 0$?

405. У једнакокраки троугао основице a и висине h уписан је правоугаоник, тако да су му два темена на основици троугла, а друга два на крацима. Одредити висину правоугаоника тако да он има највећу површину.

406. Одредити најмању вредност израза $E = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ако су x и y позитивни реални бројеви такви да је $x + y = 5$.

407. Скицирати графике функција:

а) $y = |x^2 - 3x + 2|$; б) $y = |x^2 - x - 2|$;

в) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$; г) $y = -|x^2 - |x| - 6|$;

д) $y = -|x^2 + 2x - 3| + x - 1$; ђ) $y = -|2x^2 + 4x - 6| - x + 1$.

408. Дат је скуп парабола $y = mx^2 + 2(m+1)x + 4$. Доказати да све оне пролазе кроз две сталне тачке.

409. Нека је $x^2 + px + q = 0$ једначина са рационалним коефицијентима. Одредити коефицијенте p и q и друго решење x_2 ове једначине, ако је једно њено решење x_1:

а) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; б) $x_1 = 4 - \sqrt{3}$; в) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$; г) $x_1 = \frac{1}{i}$.

410. Реални бројеви b, c, p, q задовољавају једнакост $bp = 2(c + q)$. Показати да бар једна од функција $f_1(x) = x^2 + bx + c$, $f_2(x) = x^2 + px + q$ има нуле у скупу $\mathbf{R}$.

411. Одредити цео број a тако да су нуле функције $f(x) = (x - a)(x - 3) + 3$ такође цели бројеви.

412. Доказати да су нуле функције $f(x) = x^2 - px + q$ рационални бројеви ако је $p = mq + \frac{1}{m}$, где су m, q рационални параметри.

413. За које вредности реалних параметара m, n функција

$$f(x) = x^2 + (m+n)x + m - n$$

има негативне вредности ако и само ако је $x \in (-4, 2)$.

414. Ако квадратне функције $f_1(x) = a_1x^2 + 2b_1x + c_1$, $f_2(x) = a_2x^2 + 2b_2x + c_2$, имају позитивне вредности за све $x \in \mathbf{R}$, тада то својство има и квадратна функција $f(x) = a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2$. Доказати.

415. Решити једначине ($a \in \mathbf{R}$):

а) $x^3 - ax^2 - (2a^2 + 2)x - 2a = 0$; б) $-x^4 - 2ax + x + a^2 - a = 0$.

416. а) $\left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \le 1$; б) $\frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x+2| + x^2} \ge 1$;

в) $\frac{|x^2 + x - 2| - x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \ge -2$; г) $\frac{|x^2 - x - 2| - 4}{x^2 - 2x - 3} > 1$.

417. За које вредности реалног параметра p неједначина $2x^2 + px - 5 > 0$ има бар једно решење x за које је $|x| < 1$?

418. Решити систем једначина $x^3 + y^3 = 1$, $x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2$.

Решити једначине (задаци 419–420):

419. $\sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 5\sqrt[3]{1 - x^2}$.

420. а) $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}$; б) $\frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = 6$.

421. За које вредности реалног параметра m једначина $x^4 + 2x^3 + mx^2 + 2x + 1 = 0$ има четири реална и различита решења?

422. Одредити просте бројеве p и q тако да решења једначине $x^2 - px + q = 0$ буду цели бројеви.

423. Показати да су решења једначине

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

реална ако су a, b и c реални бројеви.

424. Назовимо број d „добрим“ ако је за сваки реалан број x испуњено

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leq d.$$

а) Доказати да је 4 „добар“ број. б) Наћи све „добре“ бројеве.

425. 1° Ако су x_1 и x_2 нуле тринома $k(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, изразити $(1+x_1)/(1-x_1) + (1+x_2)/(1-x_2)$, помоћу a, b и c.

2° Доказати да из чињенице да је трином $k(x)$ позитиван ако и само ако је $1 < x < 3$, следи $a < 0$.

3° Одредити за које је вредности x у том случају испуњена неједнакост $ax^2 - bx + c > 0$.

426. Дата је једначина $2x^2 + mx + 4 = 0$. Одредити реалан број m тако да функција $y = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ има најмању вредност. За које вредности m је $y > 0$?

427. Дат је квадратни трином $k(x) = (p-2)x^2 - 2px + 2p - 3$, где је p реалан параметар.

1° За које је вредности параметара p за свако x испуњена неједнакост $k(x) < 0$?

2° Одредити вредности параметра p тако да је збир квадрата реципрочних вредности решења једначине $k(x) = 0$ једнак 2.

428. Нека је $f(x) = x^2 + (3k+1)x + 5k$ и $g(x) = (k+1)x^2 + 4kx + 7k$.

а) Наћи све вредности реалног параметра k за које је $f(x) > g(x)$ за свако x.

б) Наћи најмању вредност функције $F(k) = 2f(k-1) + g(-1)$.

429. Наћи сва три решења једначине $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$.

430. Решити једначине:

а) $x^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 8$; б) $\dfrac{x^2+12x+4}{x+2} = 6\sqrt{x}$;

в) $x = 1 - 1986(1 - 1986x^2)^2$.

431. Одредити реалан број a, тако да једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење.

432. Дата је једначина $ax(x-1) + (b-c)x + c = 0$.

а) Одредити вредност збира кубова њених корена.

б) Ако су a, b, c дужине страница неког троугла, доказати да је трином на левој страни једначине позитиван.

433. Нека су p, q и r цели непарни бројеви. Доказати да једначина $px^2+qx+r = 0$ нема рационалних корена.

434. Одредити све реалне бројеве a за које ниједан број x за који важи $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$, није по апсолутној вредности већи од 2.

435. Ако једначина $f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ нема реалних решења и ако је $a + b + c = 1$, доказати да је $c > 0$.

436. Дата је квадратна једначина $x^2 - x + b = 0$, чији су корени α и β рационални бројеви, а b реалан број. Доказати да су корени једначине $x^2 + \alpha x - \beta = 0$ такође рационални бројеви.

437. Нека су a, b, c, реални бројеви такви да једначине $ax^2 + bx + c = 0$ и $-ax^2 + bx + c = 0$ имају реална решења. Ако је r било које решење прве, а s било које решење друге једначине $(s > r)$, доказати да интервал $[r, s]$ садржи бар једно решење једначине $\dfrac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$.

438. Ако за коефицијенте једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, важи $5a + 3b + 3c = 0$, тада једначина има бар једно решење x_0 тако да је $0 \leq x_0 \leq 2$. Доказати.

439. Дат је скуп функција $y = (m-1)x^2 + 2mx + 4$, $m \in \mathbf{R}$.

а) Доказати да све функције садрже две сталне тачке A и B и одредити те тачке.

б) Одредити ону криву из датог скупа која додирује Ox-осу, а затим ону криву чије је теме тачка B $(B \notin Ox)$.

440. а) Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Ако су x_1 и x_2 нуле функције $f(x)$, доказати да је $x_1 < \alpha < x_2$ ако и само ако је $af(\alpha) < 0$.

б) За које вредности параметра m је број 2 између корена једначине $(m-3)x^2 + 2(m-4)x + m - 5 = 0$?

в) Одредити положај броја -1 у односу на корене једначине $4x^2 + 5x - 6 = 0$.

441. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c, x$ — реални бројеви). Ако за $|x| \leq 1$ важи $|f(x)| \leq 1$, доказати да за $|x| \leq 2$ важи $|f(x)| \leq 7$.

442. а) Дат је квадратни трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ такав да за $-1 \leq x \leq 1$ важи $|f(x)| \leq 1$. Доказати да је $|a| \leq 2$.

б) Одредити бар један трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ такав да важи $|a| = 2$ и $|f(x)| \leq 1$ за $-1 \leq x \leq 1$.

443. Ако је трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0)$ такав да једначина $f(x) = x$ нема реалне корене, тада ни једначина $f(f(x)) = x$ нема реалних корена. Доказати.

444. Ако су x, y, z реални бројеви такви да је $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$, доказати да је сваки од њих у интервалу $[1, 7/3]$.

445. Ако реални бројеви x, y, z задовољавају једначине $x + y + z = 2$ и $xy + yz + zx = 1$, доказати да они припадају интервалу $[0, 4/3]$.

446. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Доказати да за све вредности x_1 и x_2 важи $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

447. Нека су a, b и c цели бројеви и $a > 0$. Ако једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има два различита решења у интервалу $(0, 1)$, доказати да је $a \geq 5$. Наћи пример овакве једначине за $a = 5$.

448. Одредити скуп вредности реалне функције:

а) $f(x) = 1 + \dfrac{4 - x}{x^2 - 4x + 3}$; б) $f(x) = \dfrac{6 - x}{x^2 - 5x + 4} + 1$.

449. Ако је $xy \neq 0$, доказати да је $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} - 3\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$.

450. Ако је $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, доказати да је $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \geq \dfrac{1}{2}$.

451. График функције $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$, где су $a, b, c \in \mathbf{R}$, сече x-осу. Доказати.

452. За које вредности реалног параметра q су нуле функције $f(x) = x^2 + x + q$ а) мање од q; б) веће од q?

453. За коју вредност $x \in \mathbf{R}$ функција

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

има минимум?

454. Одредити услове при којима график квадратне функције

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2$$

додирује x-осу.

455. Дат је скуп парабола $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$. Одредити геометријско место темена тих парабола ако су два коефицијента константе, а трећи променљива.

456. Решити системе једначина:

а) $10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0$, $3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0$;
б) $y^2(x^2 - 3) + xy + 1 = 0$, $y^2(3x - 6) + xy + 2 = 0$;
в) $\dfrac{x}{y}(x + y - 2) = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{y}{x}(x + y - 1) = 9$;
г) $y^2 - |xy| + 2 = 0$, $8 - x^2 = (x + 2y)^2$;
д) $|xy - 2| = 6 - x^2$, $2 + 3y^2 = 2xy$;
ђ) $x^2 + xy + xz - x = 2$, $y^2 + xy + yz - y = 4$, $z^2 + xz + yz - z = 6$.

457. Одредити вредности реалног параметра a за које систем

$$x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \quad \text{и} \quad x - y + a = 0$$

има јединствено решење. Наћи то решење.

458. Решити једначину $\sqrt{5 - \sqrt{x + 1 + \sqrt{2x^2 + x + 3}}} = 1$.

459. Решити једначине:

а) $x^3\sqrt[6]{x^5} - 5x^2\sqrt[12]{x} = 6\sqrt[3]{x}$; б) $\dfrac{x + 2}{2\sqrt{x + 1} - 3} = \dfrac{\sqrt{x + 1} + 1}{3} + 4$;
в) $5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 2x^2 + 3x + 3$; г) $9 - \sqrt{81 - 7x^3} = \frac{1}{2}x^3$.

460. Решити једначине:

а) $\sqrt{4x - y^2} - \sqrt{y + 2} = \sqrt{4x^2 + y}$; б) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{x + 3}$;
в) $x = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$; г) $\sqrt{12 - \dfrac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \dfrac{12}{x^2}} = x^2$.

461. Решити једначину: $\sqrt{5x + 1} - 2\sqrt{4 - x} + \sqrt{5}\sqrt{x + 2} = \sqrt{61 - 4x}$.

462. Решити неједначине:

а) $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} > \dfrac{x - 1}{x}$; б) $\dfrac{x}{x - a} - \dfrac{2a}{x + a} > \dfrac{8a^2}{x^2 - a^2}$ $(a \in \mathbf{R})$.

463. Наћи реална решења једначина:

а) $\sqrt[4]{629 - x} + \sqrt[4]{77 + x} = 8$; б) $\sqrt[5]{(x - 2)(x - 32)} - \sqrt[5]{(x - 1)(x - 33)} = 1$.

464. Наћи сва целобројна решења једначине:

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}_{1000 \text{ корена}} = y.$$

465. Решити једначину $|x^2 - x - 2| = x + m$, $m \in \mathbf{R}$.

466. Решити неједначину: $(m - 2)x^2 + 2mx + 2m + 3 < 0$, $m \in \mathbf{R}$.

Решити једначине, a, $b \in \mathbf{R}$ (задаци 467–469):

467. $\dfrac{1}{\sqrt{11 - x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}} = \dfrac{4}{5}$.

468. а) $\sqrt[3]{(a + x)^2} - 2\sqrt[3]{(a - x)^2} = \sqrt[3]{a^2 - x^2}$;
б) $\sqrt[3]{(a + x)^2} - \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a - x)^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

469. а) $\sqrt[n]{\dfrac{a - x}{b + x}} + \sqrt[n]{\dfrac{b + x}{a - x}} = 2$; б) $x + \sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

470. За које вредности параметра m неједнакости важе за све реалне вредности x?

а) $-6 < \dfrac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$; б) $-3 < \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$.

471. Решити неједначине:

а) $\dfrac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} < 1$; б) $\sqrt{\left|\frac{1}{4}-x\right|} \geq x+\frac{1}{2}$;

в) $x-\sqrt{a-2x} < 0$, $a \in \mathbf{R}$; г) $x+4a \geq 5\sqrt{ax}$, $a \in \mathbf{R}$.

472. Наћи област дефинисаности функције: $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4x+3}}$.

473. За које вредности реалног параметра a једначина

а) $|x^2-2x-3| = a$; б) $|x^2-5|x|+6| = a$

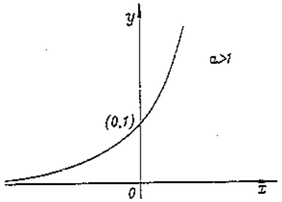
има максималан број различитих реалних решења?

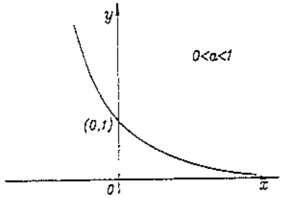
Глава III

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

3.1. Експоненцијална функција и њен график

Функција $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ назива се експоненцијална функција.





Ако је $a > 1$, тада је функција $y = a^x$ позитивна за све $x \in \mathbf{R}$ и строго растућа за све $x \in \mathbf{R}$, а ако је $0 < a < 1$, тада је функција $y = a^x$ позитивна за све $x \in \mathbf{R}$ и строго опадајућа за све $x \in \mathbf{R}$.

Скицирати графике функција (задаци 474–478):

474. а) $y = 3^x$; б) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; в) $y = 4^x$: г) $y = 1{,}6^x$.

475. а) $y = 5^x$, $-1 \leq x \leq 1$; б) $y = 5^{-x}$, $-3 \leq x < 0$;
в) $y = 2 \cdot 3^x$, $x \leq 3$; г) $y = 3 \cdot 2^{-x}$, $-1 < x$.

476. а) $y = 2^x + 1$; б) $y = 3^x - 1$; в) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2$.

477. а) $y = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$; б) $y = 2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$; в) $y = -1 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.

478. а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; б) $y = 2^{x-|x|}$; в) $y = -2^{-|x|}$;
г) $y = 2^{x^2/|x|}$; д) $y = 2^x \cdot 2^{|x|}$; ђ) $y = 2^{|x|+1}$.

3.2. Експоненцијалне једначине и неједначине

Експоненцијалне једначине су једначине код којих се непозната налази и у изложиоцу. Како је експоненцијална функција

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R} \ni x \mapsto a^x = y \in \mathbf{R}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

бијективно (1-1 и „на“) пресликавање скупа $\mathbf{R}$ на скуп $\mathbf{R}^+$, то се решавање експоненцијалних једначина заснива на следећој чињеници:

Нека је $a > 0$, $a \neq 1$. Тада

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{ако и само ако је} \quad f(x) = g(x).$$

При решавању експоненцијалних неједначина користимо монотонију експоненцијалне функције, па је:

1° за $a > 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ако и само ако је $f(x) > g(x)$;

2° за $0 < a < 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ако и само ако је $f(x) < g(x)$.

Решити једначине (задаци 479–487):

479. а) $2^x = 8$; б) $2^{x-1} = 16$; в) $9^{-1/x} = 3$;
г) $27^x = \frac{1}{9}$; д) $\left(\frac{4}{5}\right)^{0,2x} = \frac{125}{64}$; ђ) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = 81$;
е) $a^{x-7} = a^{7-x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; ж) $a^x \cdot \sqrt{a} = a^{3/x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
з) $16^{1/x} = \sqrt{8^x}$; и) $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^x$; ј) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2(x+1)} \cdot 64 = 1$.

480. а) $2^x \cdot 3^{x+1} = 18$; б) $3^x \cdot 5^{x-1} = 45$; в) $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x+1} = 250$;
г) $3^x \cdot 7^{2-x} = 21$; д) $(x^2+1)^{2x-3} = 1$; ђ) $3^x \cdot 4^{x+1} = 576$.

481. а) $0{,}5^{x^2-20x+61{,}5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \sqrt[4]{1{,}5}$;
в) $\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x}-1}} = 1{,}5$; г) $3^{x^2-5x+6} = 1$.

482. а) $4^{x+1} + 4^x = 320$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$; в) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$.

483. а) $0{,}125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;
в) $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$; г) $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = \frac{(0{,}04)^x}{25}$;
д) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$; ђ) $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$;
е) $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$; ж) $\left((\sqrt[5]{27})^{x/4-\sqrt{x/3}}\right)^{x/4+\sqrt{x/3}} = \sqrt[4]{3^7}$;
з) $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot (0{,}125)^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

484. а) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$; б) $5^x - 5^{3-x} = 20$;
в) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$; г) $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$;
д) $4^{2/x} - 5 \cdot 4^{1/x} + 4 = 0$; ђ) $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$;
е) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$; ж) $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$;
з) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$; и) $3^{2x+1} + 20 \cdot 3^x + 3 = 0$;
ј) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$; к) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$;
л) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; љ) $2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} - \frac{43}{16} = 0$;
м) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$;
н) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 10$.

485. а) $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$; б) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$;
в) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$; г) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;
д) $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0$

486. а) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$; б) $2^{3x+1} + 1 = 2^{2x} + 2^{x+1}$;
в) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$; г) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$.

487. а) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$; б) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$;
в) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; г) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{2x/3} = 675$;
д) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$; ђ) $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.
е) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$; ж) $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$;
з) $3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192$;
и) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$;
ј) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$;
к) $4^{2x+2} - 3^{2x+\frac{3}{2}} = 3^{2x+\frac{5}{2}} - 2^{4x+3}$;

л) $3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{x+2}{3}} = 2^{\frac{x-1}{3}} + 3^{\frac{x}{2}-1}$; љ) $5^{\frac{2x+4}{5}} - 4^{\frac{2x-3}{3}} = 5^{\frac{2x-1}{5}} + 4^{\frac{2x}{3}}$.

Решити системе једначина (задаци 488–489):

488. а) $4 \cdot 4^x = 8^y,\ 2 \cdot 2^y = 2^x$; б) $3 \cdot 2^x - 3^y = 11,\ 2^x + 4 \cdot 3^y = 8$;

в) $3^{x+1} - 2^y = \frac{17}{2},\ 3^x + 2^{y+1} = 4$;

г) $x^y = 243,\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2$; д) $x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^{8/3},\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = x^{2/3}$;

ђ) $11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71,\ 11^z + 2 \cdot 5^{y/2} = 21,\ 11^{(x-1)z} + 5^{y/2} = 16$.

489. а) $3^{2x} - 2^y = 725,\ 3^x - 2^{y/2} = 25$; б) $x^{2y^2-1} = 5,\ x^{y^2+2} = 125$;

в) $y^{5x^2-51x+10} = 1,\ xy = 15$; г) $2^x + 2^y = 12,\ x + y = 5$;

д) $x^{4-3y-y^2} = 1,\ (x+y)^2 = 9$; ђ) $3^x - 2^{y^2} = 77,\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7$.

Решити неједначине (задаци 490–492):

490. а) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{1/x}$; б) $(1{,}25)^{1-x} < (0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$;

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1$; г) $0{,}5^{2^{1/x}} < 0{,}0625$; д) $0{,}1^{4x^2-2x-2} \leq 0{,}1^{2x-3}$;

ђ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{1-|x|}} > 9$.

491. а) $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$; б) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$;

в) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$; г) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

д) $7^{1+x} + 7^{1-x} < 50$; ђ) $4^{1-x^2} + 2^{2-x^2} > 3$;

е) $5^{2x-3} > 2 \cdot 5^{x-2} + 3$; ж) $10^{2\sqrt{x}} + 25^{\sqrt{x}} \leq 4{,}25 \cdot 50^{\sqrt{x}}$;

з) $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}}$; и) $9 \cdot 16^x + 4 \cdot 81^x < 13 \cdot 36^x$.

492. а) $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$; б) $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3$;

в) $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$; г) $(x^2+x+1)^x < 1$; д) $(1-2x+4x^2)^{x^2-x} > 1$.

3.3. Појам и својства логаритма

$x = \log_a b$ ако и само ако је $a^x = b$ ($a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$). Основне особине логаритама:

1° $a^{\log_a b} = b$, за $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$;

2° $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, за $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$;

3° $\log_a x^s = s \log_a x$, за $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ s \in \mathbf{R}$;

4° $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, за $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$;

5° $\log_a 1 = 0$, за $a > 0,\ a \neq 1$;

6° $\log_a a = 1$, за $a > 0,\ a \neq 1$;

7° $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, за $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$;

8° $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, за $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1$;

9° $\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$, за $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0$;

10° $\log_a x = \log_{a^s} x^s$, за $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0$.

Уобичајено је да се декадни логаритми (логаритми за основу 10) означавају са lg. У задацима, код којих није битно који је број основа логаритма, користићемо симбол log.

493. Одредити x ако је:

а) $\log_3 9 = x$; б) $\log_4 256 = x$; в) $\log_4 \frac{1}{4} = x$; г) $\log_x 125 = 3$;

д) $\log_x \frac{1}{8} = 3$; ђ) $\log_2 x = -3$; е) $\log_{1/4} x = \frac{1}{2}$; ж) $\log_{36} x = -\frac{1}{2}$.

494. Израчунати:

а) $\log_2 16$; б) $\log_{5/7} \frac{25}{49}$; в) $\log_{10} 1000$;

г) $\log_8 \frac{1}{4}$; д) $\log_5 \sqrt{5}$; ђ) $\log_{1/2} \frac{1}{16}$;

е) $\log_{25} \frac{1}{625}$; ж) $\log_{2/3} \frac{243}{32}$; з) $\log_{3^{-2}} \sqrt[3]{9}$.

495. Трансформисати следеће изразе тако да се операција логаритмовања врши што мање пута ($a, b, c > 0$):

а) $\log a + \log b$; б) $3 \log a + 2 \log c$;

в) $2 \log a + 3 \log b + 4 \log c$; г) $\log a - 2 \log b$;

д) $\log(a^2+b^2) - 2 \log c$; ђ) $2 \log a - 3 \log(a^2+b^2)$;

е) $\frac{1}{3}\log a+\log b$; ж) $\frac{2}{3}\log a+3\log b-\frac{2}{5}\log c$.

Логаритмовати изразе $(a,b,c,x,y>0)$ (задаци 496–497):

496. а) $A=2ab$; б) $A=\frac{4a^2}{b}$; в) $A=\frac{\sqrt{x}}{x^2y}$;
г) $A=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}$; д) $A=\frac{\sqrt{x\sqrt{xy}}}{\sqrt[3]{xy}}$.

497. а) $(a^2)^3$; б) $(b^{-3})^4$; в) $(bc^{-4})^2$;
г) $(a^2b^3)^{-2}$; д) $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{4}}$; ђ) $\sqrt{a}$;
е) $\sqrt[5]{a^2b}$; ж) $\sqrt{\sqrt{a}}$; з) $\sqrt[3]{a\sqrt{bc}}$.

498. Одредити x из једначина (антилогаритмовати) $(a,b,c,d>0;\ m,n\neq 0)$:
а) $\log_2 x=\log_2 a+\log_2 b$; б) $\log_3 x=3\log_3 a+2\log_3 c$;
в) $\log_5 x=\log_5 a+\log_5 b-\log_5 c$; г) $\log x=\log a+\frac{1}{2}(\log b-\log c)$;
д) $\log x=\frac{1}{n}\left(\log a+\frac{1}{m}(\log b-\log c)\right)$;
ђ) $\log x=\frac{3}{5}\log(a+b)-\frac{4}{7}\log(a-b),\ a>b$;
е) $\log x=\frac{1}{2}\left(\log a-\log b+\frac{1}{3}(\log c+\frac{1}{2}\log d)\right)$.

499. Израчунати:
а) $\log_8\log_4\log_2 16$; б) $\log_2 8-2\log_6 3-\log_6 4$; в) $25^{\log_5 3}$;
г) $\log_a b^2+\log_{a^2} b^4,\ a>0,\ a\neq 1,\ b\neq 0$; д) $3^{\frac{1}{\log_2 3}}$;
ђ) $\frac{\log_2 36}{\log_2 6}$; е) $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$; ж) $\sqrt{\log^2_{1/2}4}$;
з) $a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}},\ a>1,\ b>1$; и) $\log_{1/9}\left(\log_2\frac{1}{2}\cdot\log_{1/2}8\right)$.

500. Доказати да је:
а) $\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 2=\frac{1}{2}$; б) $\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\frac{2}{3}$;
в) $\log_3 12=1+\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4$;
г) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\frac{1}{3}$;
д) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\ldots\cdot\log_{10}9=\lg 2$.

501. Изразити: а) $\log 6$ помоћу $\log 2$ и $\log 3$; б) $\log 3$ помоћу $\log 21$ и $\log 7$; в) $\log 648$ помоћу $\log 2$ и $\log 3$; г) $\log_9 7$ помоћу $\log_{63} 9$; д) $\log_5 14$ помоћу $\log_{10} 7$ и $\log_{10} 2$.

502. Израчунати (без употребе рачунских помагала):
а) $7^{\log_7 3}$; б) $343^{1-2\log_{49}13}$; в) $\lg 5\cdot\lg 20+\lg^2 2$;
г) $10^{0{,}5-\log_{10}(0{,}375\sqrt{10})}-\log_2 0{,}0625$; д) $\left((\log_3 2)^{-1}-\log_2 0{,}75+\log_{16}2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

503. Израчунати:
а) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$; б) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;
в) $\frac{(\log_{\sqrt[3]{27}}3+\log_{\sqrt[49]{5}}25)\cdot(\log_{\sqrt[4]{81}}9-\log_{\sqrt[9]{8}}4)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16}25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$;
г) $5^{3-\log_5 25}+3^{2-\log_3 3}-5\cdot 2^{4-\log_2 5}$;
д) $36^{1-\log_6 3}+25^{-\log_5 6}$; ђ) $4^{\log_2 3+\log_4\left(\frac{5}{11}\right)}$.

504. Који је број већи:
а) $\log_3 108$ или $\log_5 375$? б) $\log_3 7$ или $\log_{1/3}\frac{1}{7}$;
в) $\log_{1/3}7$ или $\log_3\frac{1}{7}$; г) $\log_3 7$ или $\log_{1/3}7$;
д) $\log_{20}80$ или $\log_{80}640$?

505. Доказати да је $\frac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5}}=1$.

506. Израчунати:
а) $\log_6 9$, ако је $\log_6 2=k$; б) $\lg 125$, ако је $\lg 2=a$;
в) $\log_5 6$, ако је $\lg 2=a$, $\lg 3=b$; г) $\lg 122{,}5$, ако је $\lg 5=a$, $\lg 7=b$;
д) $\log_6 16$, ако је $\log_{12}2=a$; ђ) $\log_3 5$, ако је $\log_6 2=a$, $\log_6 5=b$;
е) $\log_{35}28$, ако је $\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$;
ж) $\log_{30}8$, ако је $\lg 5=a$, $\lg 3=b$; з) $\lg 56$, ако је $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$;
и) $\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, ако је $\log_{ab}a=t$, $(a,b>0,\ ab\neq 1)$;
ј) $\lg 2$ и $\lg 5$, ако је $\lg 2\cdot\lg 5=a$.

507. Одредити знак израза:
а) $\log_{1,7}\left[\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right]$; б) $\log_{0,3}\left[\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right]$;
в) $\frac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3}4-\log_{0,3}3}$; г) $\frac{\log_2 10-\log_5 7}{\log_5 8-\log_2 11}(\log_{1/2}12+\log_{2/3}15)$.

508. Доказати неједнакости:
а) $(\log_2\pi)^{-1}+(\log_5\pi)^{-1}>2$; б) $(\log_2 3)^{-1}+(\log_4 3)^{-1}<2$;
в) $(\log_2 3)^{-1}+(\log_5 3)^{-1}>2$.

509. Доказати:

а) Ако је $a^2+b^2=7ab$, тада је

$$\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b), \qquad a,b,c>0,\ c\neq 1.$$

б) Ако је $a^2+b^2=11ab$, $a\neq b$ и $ab\neq 0$, тада је

$$\log_c \frac{|a-b|}{3} = \frac{1}{2}(\log_c |a| + \log_c |b|), \qquad c>0,\ c\neq 1.$$

в) Ако је $a^2+4b^2=12ab$ и $a>0$, $b>0$, тада је $\lg(a+2b)-2\lg 2=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

г) Ако је $a=\log_{12}18$, $b=\log_{24}54$ тада је $ab+5(a-b)=1$.

510. Доказати једнакост $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$, где је $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$.

511. Ако је $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $x>0$, доказати да је

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\log_{ab}\left(\frac{b}{a}\right),$$

под извесним условима. Који су то услови?

512. Доказати да је:

а) $\log_a N=\log_{a^n} N^n$, за $N>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $n\in\mathbf{N}$;

б) $\log_{\frac{1}{m}}\frac{1}{n}=\log_m n$, за $m>0$, $n>0$, $m\neq 1$.

513. Ако је $\log_a M=\log_b N$, доказати да је $\log_a b=\log_M N$ $(a,b,M,N>0,$ $a,b,M\neq 1)$.

514. Доказати да вредност израза $\dfrac{\log_a N}{\log_b N}$ не зависи од броја N $(a,b,N>0,$ $a,b,N\neq 1)$.

515. Доказати да је:

а) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N}=\dfrac{\log_b M}{\log_b N}$, где је $a>0$, $b>0$, $N>0$, $M>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $N\neq 1$;

б) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N}=1+\log_a b$ $\quad(a,b,N>0,\ \ a\neq 1,\ \ ab\neq 1,\ \ N\neq 1)$;

в) $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$, $\quad(a,b,c>0,\ \ a,b,ab,c\neq 1)$.

516. Ако су a, b, c, d позитивни реални бројеви различити од 1, вредност израза $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c\cdot\log_a d$ једнака је 1. Доказати.

517. Наћи природан број n ако важи $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)=10$.

518. Ако је $\log_k x+\log_n x=2\log_m x$, доказати да је $n^2=(kn)^{\log_k m}$ $(x,m,n,$ $k>0,\ x,m,n,k\neq 1)$.

519. Ако је $\log_b x=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_c x)$, доказати да је

$$\log_b\sqrt{ac}=\log_b a\cdot\log_b c \qquad (a,b,c,x>0,\ \ a,b,c,x\neq 1).$$

520. Доказати да, ако је $c^2-b^2=a^2$, $c-b\neq 1$, $c+b\neq 1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, важи једнакост

$$\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a.$$

521. Ако је $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, доказати да је $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

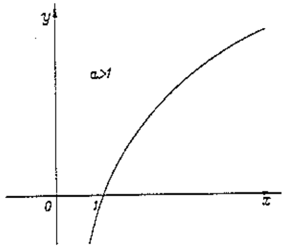
522. Ако су $a,b,c\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}$, израчунати

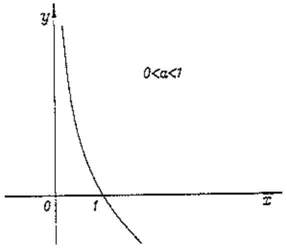
$$(1+\log_c a)\cdot\log_a ac\cdot\log_b c-\log_b ac\cdot\log_c ac\cdot\log_a c.$$

523. Доказати $n=-\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n\ \text{пута}}$.

3.4. Логаритамска функција и њен график

Логаритамска функција је функција облика $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$.





Ако је $a>1$, тада је функција $y=\log_a x$ строго растућа за све x, позитивна за $x>1$ и негативна за $0<x<1$. Ако је $0<a<1$, тада је функција $y=\log_a x$ строго опадајућа за све x, негативна за $x>1$ и позитивна за $0<x<1$.

Скицирати графике функција (задаци 524–525):

524. а) $y=\log_{1/2}x$; б) $y=\log_{1/2}(-x)$; в) $\log_2|x|$;
г) $y=|\log_{1/2}x|$; д) $y=|\log_{1/2}|x||$.

525. а) $y=a^{\log_a x}$, $a>0$, $a\neq 1$; б) $y=-\log_{1/2}x$;
в) $y=\log_3(x+1)$; г) $y=\log_{1/2}(x-1)$;
д) $y=\dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$; ђ) $y=0{,}5\log_2(x-1)^2$.

526. Наћи све реалне бројеве x за које је дефинисан израз
а) $\log_2(3x-5)$; б) $\log_{1/3}(x^2-3x+2)$; в) $\log_{x^2-x-6}(x^2+x+6)$.

3.5. Логаритамске једначине и системи једначина

Логаритамске једначине су такве једначине код којих се непозната налази и под знаком логаритма. Њихово решавање се заснива на чињеници да је логаритамска функција

$$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R},\qquad \mathbf{R}^+\ni x\mapsto \log_a x=y\in\mathbf{R},\qquad a>0,\quad a\neq 1.$$

бијективно (1-1 и „на“) пресликавање скупа $\mathbf{R}^+$ на скуп $\mathbf{R}$, тако да је за $a>0$, $a\neq 1$

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\quad \text{ако и само ако}\quad f(x)=g(x),$$
$$f(x)>0,\ \ g(x)>0.$$

Решити једначине (задаци 527–540):

527. а) $\log_2 x=4$; б) $\log_{1/3}(x-1)=2$; в) $\log_4(x+1)=1$; г) $\log_{x-1}3=2$;
д) $\log_3(5+4\log_3(x-1))=2$; ђ) $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x)))=\dfrac{1}{2}$.

528. а) $\log_4\log_3\log_2 x=0$; б) $\log_{15}\log_4\log_3 x=0$;
в) $\log_2\log_2 x=\log_2 3+\log_2 4$; г) $\log_2(\log_4(\log_3 x))=-1$.

529. а) $2(\log_x\sqrt{5})^2-3\log_x\sqrt{5}+1=0$; б) $\log_{1/3}x-5\sqrt{\log_{1/3}x}+4=0$;
в) $\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0$; г) $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0$.

530. а) $\log_4(x+2)\log_x 2=1$; б) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{81}x=7$;
в) $\log_{\sqrt{2}}x+\log_2 x+\log_{\sqrt{8}}x=11$; г) $\log_2 x-2\log_8 x+\log_{\sqrt{2}}2x=\dfrac{20}{3}$;
д) $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$.

531. а) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$; б) $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$;
в) $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$; г) $\log_7(2^x-1)+\log_7(2^x-7)=1$;
д) $\lg x-\dfrac{1}{2}\lg\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\lg\left(x+\dfrac{1}{8}\right)$;

ђ) $\log_2 182-2\log_2\sqrt{5-x}=\log_2(11-x)+1$;
е) $\lg\sqrt{x-8}+\dfrac{1}{2}\lg(2x+1)=1$;
ж) $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)$.
з) $2\log_2\dfrac{x-7}{x-1}+\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=1$; и) $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0{,}5=0$;
ј) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$;
к) $\log_{10}(x^2+11x-2)+\log_{1/10}x=1$; л) $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$.

532. а) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$; б) $\log_7 2+\log_{49}x=\log_{1/7}\sqrt{3}$;
в) $\log_5 x+\log_{25}x=\log_{1/5}\sqrt{3}$;
г) $\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}(x^3-2)+\log_{0,2}(x-2)=4$;
д) $\log_a x+\log_{a^2}x+\log_{a^3}x=11$, $a>0$, $a\neq 1$;
ђ) $\log_{1/2}^2(4x)+\log_2\left(\dfrac{x^2}{8}\right)=8$;
е) $\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\sqrt[4]{3}}x+\log_{\sqrt[6]{3}}x+\cdots+\log_{\sqrt[16]{3}}x=36$.

533. а) $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29$; б) $2\cdot 3^{x+1}-5\cdot 9^{x-2}=81$;
в) $49^x-6\cdot 7^x+5=0$; г) $2^x+12\cdot 2^{-x}=9{,}5$;
д) $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$; ђ) $64^{\frac{1}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0$.

534. а) $2^{2\lg 4x-1}-7^{\lg 4x}=7^{\lg 4x-1}-3\cdot 4^{\lg 4x}$;
б) $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$;
в) $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-\frac{1}{2}}=3^{\log_{16}x+\frac{1}{2}}-2^{2\log_{16}x-1}$;
г) $8^{\lg x}+3^{-\lg x}\cdot 24^{\lg(10x)}=25$;
д) $9^{1+\log_3 x}+3^{1+\log_3 x}=210$.

535. а) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$; б) $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6$;
в) $-\log_{1/7}x+\log_{1/\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\log_{1/7}^2\dfrac{1}{x}+\log_x^2 7-\dfrac{7}{4}$;
г) $\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$.

536. а) $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$; б) $(\sqrt{x})^{\log_3 x-1}=3$; в) $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}$;
г) $x^{\lg x}=1000x^2$; д) $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$; ђ) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

537. а) $\log_7(6+7^{-x})=x+1$; б) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$;
в) $\log_3(3^x-8)=2-x$; г) $\log_2(2^x-4)=5-x$;
д) $\log_2(4^x+16)-\dfrac{2}{\log_5 4}=x+1$.

538. а) $x^{1+\lg x} = 10x$; б) $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1)$;

в) $x^{2\lg x} = 10x^2$; г) $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$;

д) $x^{\log_3 x} = 9$; ђ) $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1} = 5$;

е) $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}$; ж) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$;

з) $x^{2\lg^2 x} = 10x^3$; и) $3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x} = 9$;

ј) $15^{\log_5 x}\cdot x^{\log_5 45x} = 1$; к) $x^{1+\log_2 x} = 4$;

л) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2(1/\lg x)^2} - 30\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(1/\lg x)^2} + 200 = 0$ (наћи бар једно решење).

539. а) $1+\log_2(x-1) = \log_{(x-1)} 4$; б) $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$;

в) $\dfrac{1}{\log_6(3+x)} + \dfrac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$;

г) $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x = -1$; д) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x = 1$;

ђ) $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}$;

е) $5\log_{x/9} x + \log_{9/x} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

ж) $2\log_9^2 x = \log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$;

з) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$; и) $\log_x 4 + \log_x 2 - \log_4\sqrt{x} = 1$;

ј) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$;

к) $\log_{1-2x^2} x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$.

540. а) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$, $a>0$, $a\neq 1$;

б) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$, $a>0$, $a\neq 1$;

в) $\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10\left(\log_{10} 10a - \left|\log_{10}\dfrac{x}{a}\right|\right)$;

г) $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a\cdot\log_{1/a} 2x = 0$.

Решити системе једначина (задаци 541–544):

541. а) $\log_y x - \log_x y = \dfrac{8}{3}$, $xy = 16$;

б) $\log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9$, $x + y - 5a = 0$;

в) $2\log(x-y) = \log 4$, $2^x\cdot 4^y = 32$;

г) $3^x\cdot 5^y = 225$, $\log(x-y+1) = 0$;

д) $\log_2(x+2)^3 + \log_3(y+1)^2 = 6$, $\log_4(x+2)^4 + \log_9\dfrac{1}{y+1} = 4$;

ђ) $x\log y = \log 8$, $\dfrac{x+1}{x-1}\log y = 2\log 2$;

е) $4^{x+y} = 2^{y-x}$, $4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5$;

ж) $\log(x^2+y^2) = 1+\log 8$, $\log(x+y) - \log(x-y) = \log 3$.

542. а) $\begin{cases} xy = 40,\\ x^{\lg y} = 4;\end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2,\\ x^2 + y = 12;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1,\\ \log_{xy}(x+y) = 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^y 9^x = 81,\\ \log(x+y)^2 - \log x = 2\log 3.\end{cases}$

543. а) $5^{\log_{1/5} x} = y-2$, $4^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-y}$;

б) $x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4$, $\log_4 x - \log_4 y = 1$;

в) $2\log_4 x + \log_2(y-1) = 1$, $\log_8 x\log_{\sqrt{2}}(y-1) = -\dfrac{4}{3}$;

г) $\log_6 x = y+4$, $x^{y+1} = 36^{-1}$.

544. а) $\log_2 x + \log_4\ y + \log_4\ z = 2$,
$\log_3 y + \log_9\ z + \log_9\ x = 2$,
$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$;

б) $yx^{\log_y x} = x^{5/2}$, $\log_4 y\cdot\log_y(3x-y) = 1$;

в) $y - \log_3 x = 1$, $x^y = 3^{12}$;

г) $x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27$, $\log_3 y - \log_3 x = 1$.

3.6. Логаритамске неједначине

При решавању логаритамских неједначина користи се особина логаритамске функције $y = \log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) да је строго опадајућа за $0<a<1$, односно строго растућа за $a>1$. Према томе, неједначина облика

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

за $0<a<1$ еквивалентна је систему неједначина

$$\begin{cases} f(x) > g(x),\\ g(x) > 0\end{cases}$$

а за $a>1$ систему

$$\begin{cases} f(x) < g(x),\\ f(x) > 0.\end{cases}$$

Решити неједначине (задаци 545–549):

545. а) $\log_2 x > 0$; б) $\log_2 x < -1$; в) $\log_{1/64} x > -\frac{1}{2}$;
г) $\log_2(3x-2) < 0$; д) $\log_{1/2}(x^2-7x+10) > 0$;
ђ) $\log_x 32 > 5$; е) $\log_x 125 < 3$.

546. а) $\log_{1/5} \frac{4x+6}{x} \geq 0$; б) $\log_{1/2}(x^2-4x+3) \geq -3$;
в) $\log_2 \frac{x-1}{x+1} < 1$; г) $\log_{1/3}(\log_4(x^2-5)) > 0$;
д) $\log_{1/2}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$; ђ) $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$;
е) $\log_{0,2}(x^2-x-2) > \log_{0,2}(-x^2+2x+3)$;
ж) $\log_{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \log_{1/2}(x-1) \geq 1$;
з) $\log_{1/9}(x^2-4) \geq \log_{1/9}(2|x|-1)$; и) $\log_4(3^x-1) \cdot \log_{1/4} \frac{3^x-1}{16} \leq \frac{3}{4}$.

547. а) $\log_3(1-x) < \log_{1/3}(x+2)$; б) $\log_5 x \geq \log_{25}(3x-2)$;
в) $\log_3 x < \log_9(x+2)$; г) $\log_2(2x-1) > \log_{1/2} 2$;
д) $\log_{1/5} x + \log_4 x > 1$; ђ) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$.

548. а) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 16x > 1$; б) $\log_{x-3}(x^2-4x+3) < 0$.

549. а) $\log_{2x+3} x^2 < 1$; б) $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$;
в) $\log_x |x-1| \leq 1$; г) $\log_{2x}(x^2+1) < 1$;
д) $\log_{2x}(2-x) < 1$; ђ) $\log_x \sqrt{x+12} > 1$.

3.7. Додатак уз трећу главу

Решити једначине (задаци 550–552):

550. а) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$; б) $2 \cdot 8^x - 12^x = 27^x$;
в) $6 \cdot 5^{2x+1} - 5 \cdot 150^x + 6^x = 6$; г) $3^x + 21 \cdot 7^{2x} = 3 + 7 \cdot 147^x$.

551. а) $3^x + 4^x = 5^x$; б) $5^x + 12^x = 13^x$.

552. а) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$; б) $3^{3x} + \frac{8}{3^{3x}} + 6\left(3^x + \frac{2}{3^x}\right) = 27$;
в) $2^{2x+2} + 5^{2x+2} - 29 \cdot 5^x \cdot 2^x = 0$; г) $2^{2x+3} - 3 \cdot 10^x = 2^x \cdot 5^{x+2} - 20 \cdot 5^{2x}$.

553. Израчунати вредност израза:

а) $\left(\frac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\lg x}} - 4 \cdot 10^{-1} \cdot \left(\frac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\lg x}}$ ако је $x = \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$;

б) $\left(3^{\frac{\log_{100} a}{\log_{10} a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} 3}{\log_{10} 3}}\right)^{2\log_{3a}(a+3)}$ ако је $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq \frac{1}{3}$.

554. Ако је $f(x) = \log_6 x + 3\log_3 9x$, $x > 0$, онда је $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 12$. Доказати.

555. Ако је $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, показати да је $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, $|x| < 1$, $|y| < 1$.

556. Логаритми броја m са основама a, am, am^2, am^3 су такви да је разлика првог и другог једнака разлици трећег и четвртог. Наћи те логаритме.

557. Дата је функција $f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x$, где је a дати реалан број. У зависности од a решити једначину $f(x+a^2-a) = 2f(x)$.

558. Решити једначину:

а) $\log_2(x^2+2x-7) = \frac{1}{\log_{9-6x+x^2} 4}$;

б) $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4) = 2 - \frac{1}{\log_{4/3}(2-2x^2)}$.

559. За које вредности позитивног параметра a једначина
а) $x^2 + 2x - \lg a = 0$; б) $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$
има реалне корене?

Решити неједначине (задаци 560–561):

560. а) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x \geq 4$; б) $\lg(5^x + x - 20) > x - x\lg 2$.

561. а) $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x \leq 62$; б) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x \leq 98$.

Решити једначине (задаци 562–563):

562. а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$;
б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$;
в) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$;
г) $(5-2\sqrt{6})^{x^2-4x+4} + (5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4} = 10$;
д) $(3+2\sqrt{2})^{2(x^2-x-1)} + 1 = 6(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-1}$.

563. а) $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1$; б) $|x|^{x^2-2x} = 1$;
в) $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$; г) $|2^x-1| + |2^x-2| = 1$.

564. Решити неједначине:
а) $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} \leq -7$;
б) $4^{2+\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 2^{2+\sqrt{x-1}} - 16 < 15 \cdot 4^{\sqrt{x-1}} + 2^{3+\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}$;

в) $4^{x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-4}}+2^{2x-6+2\sqrt{x^2-4}}\geq 3^{x-3+\sqrt{x^2-4}}+3^{x-2+\sqrt{x^2-4}}$;

г) $3^{\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}+3x-8}-3^{\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}+3x-9}\geq 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-17}{3}+2x}+2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14}{3}+2x}$.

565. Израчунати збир: $S=\log_2 a\cdot\log_4 a+\log_4 a\cdot\log_8 a+\cdots+\log_{2^{n-1}} a\cdot\log_{2^n} a$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Решити једначине (задаци 566–567):

566. а) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$; б) $81^x-16^x-2\cdot 9^x(9^x-4^x)+36^x=0$.

567. $\log_3 x\cdot\log_4 x\cdot\log_5 x=\log_3 x\cdot\log_4 x+\log_4 x\cdot\log_5 x+\log_5 x\cdot\log_3 x$.

568. Решити неједначине:

а) $\log_{\frac{x+4}{2}}\left(\log_2\dfrac{2x-1}{3+x}\right)<0$; б) $\log_{9x^2}(6+2x-x^2)\leq\dfrac{1}{2}$;

в) $\log_{\log_2(0,5x)}(x^2-10x+22)>0$; г) $\log_{0,25}\left|\dfrac{2x+1}{x+3}+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$;

д) $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$; ђ) $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)+\log_3^2 x\leq 1$;

е) $\log_{|x|}(x^2-2)>1$; ж) $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x>2$.

569. Решити једначине:

а) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{101}{10(2-\sqrt{3})}$;

б) $(0{,}4)^{\lg^2 x+1}=(6{,}25)^{2-\lg x^3}$.

570. Решити једначине у зависности од реалног броја a:

а) $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$; б) $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$.

571. У равни xOy одредити скуп S тачка $M(x,y)$ чије координате задовољавају релацију:

а) $\log_y x>0$; б) $\log_2(x+y-1)<0$; в) $\log_x(\log_y x)>0$.

572. Доказати да су највеће вредности израза $(\log_5 6)^{\sin x}$ и $(\log_6 5)^{\cos x}$ једнаке.

573. Од свих тачака (x,y), у равни које задовољавају услов

$$\log_{x^2+y^2}(x+y)\geq 1,$$

наћи оне чија је друга координата највећа.

574. Одредити све функције f, за које за све позитивне реалне бројеве x и y важи $x^{f(y)}=y^{f(x)}$.

575. Доказати да, ако је $\log_a N=p$, $\log_b N=q$, $\log_{abc} N=r$, где је $N>0$, $N\neq 1$, $a,b,c>0$, $a,b,c,abc\neq 1$, важи

$$N=c^{\frac{pqr}{pq-r(p+q)}}.$$

576. Доказати да је:

а) $\log_{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n} x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x}+\dfrac{1}{\log_{a_2} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{a_n} x}}$,

$a_1,a_2,\ldots,a_n,x>0$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,x\neq 1$, $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n\neq 1$;

б) $\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N=\dfrac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc} N}$;

$N,a,b,c>0$, $a,b,c\neq 1$, $abc\neq 1$;

в) $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\log_d a$, $a,b,c,d>0$, $b,c,d\neq 1$.

577. Доказати да је

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\frac{n-1}{n}(\log_x 2)^{-2},$$

уз услове $x>0$, $x\neq 1$, $n\in\mathbf{N}$.

578. Ако је n сложен природан број и ако су $1=d_0<d_1<\ldots<d_{m-1}<d_m=n$ сви природни делиоци броја n, доказати да је

$$\frac{2}{\log n}\sum_{k=1}^{m-1}\log d_k$$

природан број.

579. Одредити све рационалне бројеве r за које је и $\log_2 r$ рационалан број.

580. а) Ако је $a>1$, $b>1$, $c>1$, доказати да важи неједнакост

$$\log_{abc}^3 a\cdot\log_a b\cdot\log_a c\leq\frac{1}{27}.$$

б) Доказати да за свако $a>0$ важи неједнакост

$$\log_3^2 a+2\log_3 a\cdot\log_3\frac{3}{a}\leq 1.$$

581. Доказати неједнакости:

а) $\dfrac{\log_b a^2}{a+b}+\dfrac{\log_c b^2}{b+c}+\dfrac{\log_a c^2}{c+a}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$, $a,b,c>1$;

б) $\log_2(a+b)>1+\dfrac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

582. Доказати неједнакости:

а) $\log_7 8<\log_6 7$; б) $\log_4 5<\log_3 4$;

в) $\log_n(n+1)<\log_{n-1} n$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$;

г) $\lg^2 9+\lg^2 11>\lg 98$.

583. Доказати да једначина $\log_{2x}\left(\dfrac{2}{x}\right)\log_2^2 x+\log_2^4 x=1$ има само један корен, који задовољава услов $x>1$.

Решити једначине (задаци 584–585):

584. $\log_{1/2}|x| = \frac{1}{4}(|x-2| + |x+2|)$.

585.
$$\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}} = \log_2(|x-2| + |x+2|) - \frac{11}{9}.$$

Глава IV

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

4.1. Уопштавање појма угла

$180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}$, $l = \alpha r$, где је l дужина кружног лука који припада централном углу α (у радијанима) круга полупречника r.

$$x = \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \qquad \text{или} \qquad x = \alpha + 360^\circ k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

586. Изразити у радијанима углове од:

а) $\alpha = 300^\circ$; б) $\alpha = 330^\circ$; в) $\alpha = 18^\circ$;
г) $\alpha = 12^\circ 15'$; д) $\alpha = 18{,}5^\circ$; ђ) $\alpha = 6{,}4^\circ$.

587. Изразити у степенима углове од:

а) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; б) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$; в) $\varphi = \frac{8\pi}{9}$.

588. Одредити, без употребе рачунских помагала, углове правоуглог троугла, у степенима и радијанима, код кога су:

а) катете једнаке;

б) једна катете два пута мања од хипотенузе.

589. Одредити, без употребе рачунских помагала, у степенима и радијанима, углове четвороугла ако се они међусобно односе као $6 : 8 : 9 : 13$.

590. Изразити степен, минут и секунд у радијанима.

591. Изразити у радијанима:

а) $95^\circ 46' 54''$; б) $62^\circ 14' 7''$; в) $75^\circ 49' 7''$.

592. Радијан изразити у степенима, минутима и секундама:

593. Изразити у степенима, минутима и секундама:

а) $0{,}2755\,\mathrm{rad}$; б) $1{,}08620\,\mathrm{rad}$; в) $0{,}68083\,\mathrm{rad}$.

4.2. Основне релације између тригонометријских функција

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
   за $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$,
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
   за $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$,
4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$,
5. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$,
6. $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$,
7. $|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$,
8. $|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

594. Одредити вредности осталих тригонометријских функција, ако је:

а) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; г) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

595. Израчунати вредности тригонометријских функција оштрог угла α ако је:

а) $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$; б) $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = m$.

596. Одредити вредности осталих тригонометријских функција, ако је:

а) $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; б) $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $t \in \mathbf{R}$.

597. Одредити $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако је:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{2}{3}$ и $0 < \alpha < \pi$, в) $\operatorname{tg}\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

598. Одредити $\sin 15°$, ако се зна да је $\cos 15° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

599. Одредити $\cos 22°30'$, ако се зна да је $\sin 22°30' = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

600. Могу ли синус и косинус датог угла α респективно бити:

а) $\dfrac{1}{6}$ и $\dfrac{5}{6}$, б) $\dfrac{4}{\sqrt{65}}$ и $\dfrac{7}{\sqrt{65}}$, в) $-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ и $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

601. Одредити вредност израза $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, ако је $\operatorname{tg} x = 2$.

602. Ако је $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = 1$, одредити $\operatorname{tg}\alpha$.

603. Ако је $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$, одредити:

а) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$.

604. Ако је $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = p$, одредити збир $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

605. Ако је $\sin x + \cos x = s$ и $\sin x \cos x = p$, показати да важи: $p = \dfrac{1}{2}(s^2 - 1)$.

606. Показати да израз $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$ не може бити негативан ни за које α.

607. Одредити $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако је: $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 5$.

608. Упростити изразе:

а) $\dfrac{2 - \operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1} - \operatorname{cosec}^2\alpha + 1$; б) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$.

в) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

Доказати идентитете (задаци 609–617):

609. $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ за $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

610. $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha,\ \alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$ за $k \in \mathbf{Z}$.

611. $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1$.

612. $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$ за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

613. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$ за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

614. $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \sin x + \cos x$;
$x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq -\dfrac{\pi}{4} + n\pi$ за $k, n \in \mathbf{Z}$.

615. $(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1\right)^2,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ за $k \in \mathbf{Z}$.

616. $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos^3\alpha} - \dfrac{1}{\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}$ за $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

617. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha)$ за $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Упростити изразе (задаци 618–630):

618. $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}$. **619.** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

620. $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$.

621. $1+\operatorname{ctg}^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

622. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

623. $\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$.

624. а) $1-\dfrac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} - \sin\beta$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta} + \dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{1+\operatorname{ctg}\beta}$;

в) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{2\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \sin^2\alpha$; г) $\left(1+\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\sin x}\right)\left(1+\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

625. а) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{\sin x + \cos x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; б) $(\operatorname{ctg}\alpha+1)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha-1)^2$.

626. а) $\dfrac{\sin x}{1+\operatorname{ctg}x} + \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{tg}x}$; б) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$.

627. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

628. $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1+\sin x\cos x}$.

629. а) $\cos^3\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$; б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$;

в) $\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+2)(2\operatorname{tg}\alpha+1) - 5\sin\alpha\cos\alpha$;

г) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

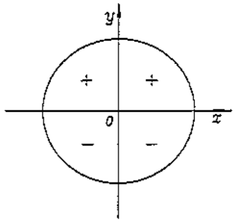
630. а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{\sec^2\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}\right)^2$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha - 1} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}$;

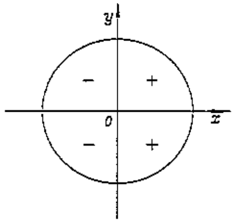
в) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

4.3. Свођење тригонометријских функција на оштар угао

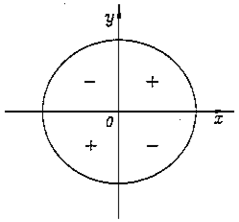
Знаци тригонометријских функција у зависности од квадранта у којем се аргумент налази приказани су на следећим сликама.



$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$

Ако израз типа $f(k\pi \pm \alpha)$, или $f\left(k\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, где је α оштар угао, треба превести у израз $g(\alpha)$, онда се поступа на следећи начин.

1° У случају да је посматрани израз облика $f(k\pi \pm \alpha)$, $k \in \mathbf{Z}$, онда треба проверити ком квадранту припада вредност $k\pi \pm \alpha$, што одређује знак резултата, у складу са претходним сликама. При том се резултат изражава истом функцијом f као у полазном изразу $(g = f)$.

На пример, ако треба одредити $\cos(\pi - \alpha)$, где је $0 < \alpha < \pi/2$, онда најпре закључујемо да $\pi - \alpha$ припада другом квадранту где је косинус негативан. Зато је

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

2° У случају да је посматрани израз облика $f\left(k\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, где је k непаран број, знак се одређује слично као у случају 1°. Међутим, овај пут функција f прелази у своју ко-функцију g (синус у косинус, котангенс у тангенс и сл).

На пример, за одређивање $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, примећујемо да $\dfrac{3\pi}{2} + \alpha$ припада четвртом квадранту где је тангенс негативан. Зато је

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

631. Доказати идентитет: $\cos(-\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\sin(-\alpha) = 1$.

Одредити вредности тригонометријских функција (632–633):

632. а) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{3}$; б) $\cos 315°$; в) $\sin 300°$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}$.

633. а) $\sin\frac{9\pi}{4}$; б) $\cos(6\pi+1)$; в) $\sin(8\pi-1)$; г) $\cos 8,5\pi$.

634. Упростити изразе:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $(\sin(180^\circ+\alpha)+\cos(90^\circ+\alpha))^2+(\cos(360^\circ-\alpha)-\sin(270^\circ-\alpha))^2$;

в) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}$; г) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)\cos\frac{\pi}{6}}$;

д) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}-\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi+\alpha)}$;

ђ) $\dfrac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(3\pi-\alpha)}-\dfrac{(a^2-b^2)\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}$;

е) $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(\alpha+2\pi)\operatorname{tg}^2(\alpha-\pi)}$;

ж) $\dfrac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha-\pi)\cos(\pi+\alpha)}+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

з) $3(\sin^4(\alpha-\pi)+\cos^4(\pi+\alpha))-2\left(\sin^6\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$;

и) $\sin^6(\alpha-\pi)+\cos^6(\pi+\alpha)+3\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;

ј) $\dfrac{\sin^3(270^\circ-\alpha)\cos(\alpha-360^\circ)}{\operatorname{tg}^3(90^\circ-\alpha)\cos^3(270^\circ-\alpha)}$;

к) $\dfrac{\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}-\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$;

л) $\dfrac{\sin^4(\pi+\alpha)-\cos^4(\pi-\alpha)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}-\dfrac{\sin^3(\pi-\alpha)+\cos^3(\alpha-2\pi)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

635. Доказати да вредност израза

$$\frac{a^2\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+b^2\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+b\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-(a+b)\operatorname{tg}^2(2\pi-\alpha)$$

не зависи од $a, b, \alpha \in \mathbf{R}$.

Доказати идентитете (задаци 636–638):

636. $\dfrac{\sin\alpha-2\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)-\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

637. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\pi-\alpha)}-\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

638. $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}=-\sin\alpha$.

639. Упростити изразе:

а) $\dfrac{\sin 750^\circ\cdot\cos 390^\circ\cdot\operatorname{tg}1140^\circ}{\operatorname{ctg}405^\circ\cdot\sin 1860^\circ\cdot\cos 780^\circ}$; б) $\dfrac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}}$;

в) $\dfrac{\sin 130^\circ\cos 330^\circ\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}225^\circ}{\sin 270^\circ\cos 220^\circ\operatorname{tg}210^\circ\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)}$;

г) $\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{tg}3^\circ\cdots\operatorname{tg}88^\circ\operatorname{tg}89^\circ$;

д) $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ$.

640. За мерни број угла $\alpha\in[0,2\pi]$ одредити знаке израза:

а) $1-\sin\alpha$; б) $1-\cos\alpha$; в) $1-\operatorname{tg}\alpha$.

За које вредности угла α израза под а) и б) имају најмању, а за које највећу вредност?

641. Ако је $\sin 1995^\circ=a$, $\operatorname{tg}1995^\circ=b$, $\operatorname{ctg}1995^\circ=c$, тада је $c>b>a$. Доказати.

4.4. Тригонометријске функције збира и разлике два угла (адиционе формуле)

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,
5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,

   $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ за $k,n\in\mathbf{Z}$ и $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 1$,
6. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,

   $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ за $k,n\in\mathbf{Z}$ и $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq -1$,
7. $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$,

   $\alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi n$ за $k,n\in\mathbf{Z}$ и $\operatorname{ctg}\alpha\neq-\operatorname{ctg}\beta$,
8. $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$,

   $\alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi n$, за $k,n\in\mathbf{Z}$ и $\operatorname{ctg}\alpha\neq\operatorname{ctg}\beta$.

642. Применом адиционих формула за збир и разлику два угла показати да је:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$.

643. Наћи без употребе рачунских помагала вредности тригонометријских функција угла: а) 15°; б) 75°; в) 105°.

644. Проверити једнакости:

а) $\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ=\frac{1}{2}$;

б) $\cos 47^\circ\cos 17^\circ+\sin 47^\circ\sin 17^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

645. Применом адиционих формула за збир и разлику два угла, одредити вредност тригонометријских функција угла: а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{5\pi}{12}$; в) $\frac{7\pi}{12}$.

646. Упростити изразе:

а) $\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

647. Одредити $\cos(\alpha+\beta)$, ако је $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

648. Израчунати $\sin(\alpha+\beta)$, ако је

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\wedge\cos\beta=-\frac{5}{13}\wedge\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\wedge\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right).$$

649. Израчунати:

а) $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, ако је $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, ако је $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

650. Одредити $\sin(\alpha+\beta)$, ако је $\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{4}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

651. Израчунати:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, ако је $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, ако је $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha=2-\sqrt{3}$ и $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ако је $\sin\alpha=m$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

652. Израчунати $\cos(\alpha+\beta)$, ако је

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}\wedge\operatorname{tg}\beta=\frac{15}{8}\wedge\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\wedge\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right).$$

653. Израчунати:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ако је $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{3}$;

в) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{2}$.

654. Упростити изразе:

а) $\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha$; б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}$; г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

655. Упростити изразе:

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos^2\alpha$;

в) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$; г) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

д) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

656. Доказати идентитете:

а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

б) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)$;

г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$;

д) $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2\beta$;

ђ) $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$.

657. Одредити $\operatorname{tg}(x+y)$, ако је $\operatorname{tg}x=\dfrac{m}{1+m}$, $\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{1+2m}$.

Упростити изразе (задаци 658–659):

658. а) $\dfrac{\sin 35^\circ\cos 20^\circ-\cos 35^\circ\sin 20^\circ}{\cos 46^\circ\cos 29^\circ-\sin 46^\circ\sin 29^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}$.

659. $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{14}+\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{\pi}{14}}$.

660. Ако су α и β оштри углови и ако је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$, показати да је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

661. Ако је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{p}{q}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{q-p}{q+p}$ и $\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, онда је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ или $\alpha+\beta=-\dfrac{3\pi}{4}$. Доказати.

662. Ако је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, доказати да је $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

663. Ако је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{7}$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, одредити $\operatorname{tg}\beta$.

664. Ако је $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\beta=\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$ и $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, одредити $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

665. Ако је $\alpha>0^\circ$, $\beta>0^\circ$, $\alpha+\beta=60^\circ$ и $\cos\alpha=\dfrac{11}{13}$, одредити $\cos\beta$.

666. Доказати идентитет: $(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=2+2\cos(x-y)$.

667. Доказати да израз $A=\sin^2(\alpha+x)-2\sin\alpha\cos x\sin(\alpha+x)+\cos^2 x$ не зависи од x.

668. Доказати да је $(2+3\operatorname{tg}^2 y)\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}y$, ако је $2\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}y=0$.

Доказати идентитете (задаци 669–676):

669. $\dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\dfrac{\operatorname{ctg}y+\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}y-\operatorname{tg}x}$. **670.** $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

671. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ **672.** $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

673. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

674. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$. **675.** $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1$.

676. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+x)-\operatorname{tg}(45^\circ-x)}{\operatorname{tg}(45^\circ+x)+\operatorname{tg}(45^\circ-x)}=2\sin x\cos x$.

677. Доказати да је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ако су α, β и γ оштри углови и $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=1$.

678. Доказати да је $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$, ако је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{12}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{3}$, где су α, β и γ оштри углови.

679. Доказати да је $\cos(x-y)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$, ако је $\sin x+\sin y=a$ и $\cos x+\cos y=b$.

680. Из $\dfrac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}x}+\dfrac{\sin^2 z}{\sin^2 x}=1$ следи $\operatorname{tg}^2 z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$. Доказати.

681. Доказати идентитет

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

4.5. Тригонометријске функције двоструког угла

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$,
   за $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4}(2n+1),\ k, n \in \mathbf{Z}$.
4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

682. Показати да је:
а) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; б) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;
в) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; г) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

683. Доказати:
а) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

684. Доказати:
а) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;
в) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$, за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{3} + \dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbf{Z}$;
г) $\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$, за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$.

685. Показати да је:
а) $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$; б) $\cos^3\alpha = \dfrac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$.

686. Израчунати $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, ако је:
а) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; б) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

687. Израчунати $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, ако је:
а) $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ и $\sin\alpha > 0$; б) $\sin\alpha = 0,6$ и $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

688. Одредити $\sin 2x$ и $\cos 2x$, ако је $\sin x = \dfrac{m-n}{m+n}$, $m+n \neq 0$, $mn > 0$.

689. Ако је $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{9}$, израчунати $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

690. Упростити изразе:
а) $\dfrac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; б) $1 - 2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$;
в) $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha$; г) $(\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha)^2$.

691. Проверити:
а) $(\cos 5 + \sin 5)^2 = 1 + \sin 10$; б) $\dfrac{\cos 4}{\cos 2 - \sin 2} = \cos 2 + \sin 2$.

692. Доказати:
а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \dfrac{1}{4}$; б) $1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2 2\alpha$.

693. Знајући да је $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, израчунати:
а) $\sin\dfrac{2\pi}{3}$; б) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}$.

694. Израчунати $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, ако је $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$.

695. Упростити израз $A = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

Доказати идентитете (задаци 696–702):

696. $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$.

697. $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

698. $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

699. $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 0{,}5\sin^2 2\alpha$.

700. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

701. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

702. $\dfrac{2 - \sin 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

703. Одредити $\sin^2 2\alpha$, ако је $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = 7$.

704. Упростити изразе:
а) $A = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}$; б) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

705. Ако је $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$, израчунати:
а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

706. Шта је веће: $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, ако $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$?

707. Доказати: а) $\sin 4x = 4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$; б) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$; в) $\operatorname{tg} 4x = \dfrac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$.

708. Доказати:

а) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$; б) $\dfrac{1}{\cos 15^\circ} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ} = 8\sin 75^\circ$.

Доказати идентитете (задаци 709–712):

709. а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2} = \cos 4\alpha$; б) $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x} = \operatorname{tg} x$.

710. $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$. **711.** $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x$.

712. а) $\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha}$;

в) $1+2\cos 2\alpha = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{(1-\sin^2 2\alpha)[(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2+4\operatorname{tg}^2\alpha]}{(1+\sin^2 2\alpha)[(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2-4\operatorname{tg}^2\alpha]} = 1$.

713. Ако су α и β оштри углови за које је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{7}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$, тада је $\alpha+2\beta = 45^\circ$. Доказати.

714. Одредити $\operatorname{tg} 5\alpha$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

715. Ако је $\sin x = \dfrac{1}{4}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, израчунати: а) $\sin 3x$; б) $\cos 3x$; в) $\operatorname{tg} 3x$.

716. Доказати да израз $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ не зависи од x.

717. Ако је $\sin x + \cos x = a$, одредити $\sin^4 x + \cos^4 x$.

718. Израчунати: а) $\sin 18^\circ$; б) $\cos 18^\circ$; в) $\operatorname{tg} 18^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 18^\circ$ користећи се једнакошћу $\sin(2\cdot 18^\circ) = \cos(3\cdot 18^\circ)$.

719. Показати да је $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$.

720. Доказати идентитете:

а) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$;

б) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$.

Доказати идентитете (задаци 721–722):

721. а) $\dfrac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x} = 3$;

б) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x$.

722. а) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \dfrac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$;

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{\cos 2\alpha}{2}$.

723. Ако су α, β и γ оштри углови и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{13}{9}$, тада је $2\alpha-\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$. Доказати.

724. Доказати да је:

а) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$; б) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

в) $\operatorname{tg} 6^\circ\operatorname{tg} 54^\circ\operatorname{tg} 66^\circ = \operatorname{tg} 18^\circ$.

4.6. Тригонометријске функције полууглова

1. $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$,
2. $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$,
3. $\left|\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, $\alpha \neq \pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$,
4. $\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

725. Доказати:

а) $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, за $\alpha\neq\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$;

б) $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, за $\alpha\neq\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, за $\alpha\neq\pi(2k+1)$ и $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, за $k,n\in\mathbf{Z}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$, за $\alpha \neq \pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

726. Доказати:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, за $\alpha \neq \pi k,\ k\in\mathbf{Z}$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, за $\alpha \neq \pi(2k+1),\ k\in\mathbf{Z}$.

727. Наћи без употребе рачунских помагала: а) $\sin 15°$; б) $\cos 15°$; в) $\operatorname{tg} 15°$.

728. Израчунати вредности тригонометријских функција од $\dfrac{\pi}{8}$.

729. Израчунати без употребе рачунских помагала $\operatorname{tg} 7°30'$.

730. Ако је $\sin\alpha = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ и $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, одредити $\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

731. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{24}{7}$ и $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, израчунати: $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

732. Израчунати: $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, ако је $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Упростити изразе (задаци 733–734):

733. а) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$; б) $4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\sin\alpha\sin(90°-\alpha)$; г) $\dfrac{\sin 160°}{\cos^4 40°-\sin^4 40°}$.

734. а) $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha$; б) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; г) $1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

735. Упростити изразе:

а) $1-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{4x}{3}\right)$; б) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3x}{2}\right)-1$;

в) $1-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{5x}{2}\right)$; г) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)-1$.

736. Доказати идентитет $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|$.

737. Израчунати без употребе рачунских помагала:

а) $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+13\cos^2\dfrac{\pi}{4}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$;

б) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}$.

738. Изразити $A = \dfrac{2}{5-4\sin\alpha+3\cos\alpha}$ у функцији од $z = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

739. Одредити $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, ако је $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\pi\right)$.

740. Одредити $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, ако је $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{32}$ и $\alpha \in \left(-\pi, -\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

741. Одредити $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако је:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$; б) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

742. Израчунати вредност израза $\dfrac{1}{2+\cos\alpha+\sin\alpha}$, ако је $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

743. Доказати да је:

а) $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = 4$; б) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} = 2$.

744. Доказати идентитете:

а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$; б) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

д) $\dfrac{1-\sin x}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$; ђ) $\dfrac{1-2\sin\dfrac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\dfrac{x}{2}+\cos x} = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}-1}{\sin\dfrac{x}{2}+1}$.

745. Израчунати вредност израза $A = \dfrac{\sin x+2\cos x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}$, ако је $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2$.

746. Ако је $\cos\alpha = \dfrac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{a+c}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{a+b}$, доказати да је

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = 1.$$

747. Доказати да је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, ако је $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

748. Наћи $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, ако је $\sin\alpha+\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ и $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

749. Одредити $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, ако је $\sin x-\cos x = m$ и $|m| \leq \sqrt{2}$, $m \neq -1$.

750. Изразити $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}$ у функцији $a = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ за $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

751. Доказати да збир

$$\sqrt{4\cos^4 x - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{4\sin^4 x + 6\cos 2x + 3}$$

не зависи од x.

752. За коју вредност α и β важи једнакост $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

4.7. Трансформација производа тригонометријских функција у збир или разлику

1. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$,
2. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$,
3. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

753. Израчунати:

а) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$; б) $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$; в) $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$.

754. Производ трансформисати у збир или разлику:

а) $\sin 5x \sin 3x$; б) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}$;

в) $\frac{3\sin 4x\cos 5x}{7}$; г) $\cos 7x\cos 5x$;

д) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$; ђ) $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)$;

е) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$; ж) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$;

з) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; и) $2\cos 4\cos 3$.

755. Представити у облику збира или разлике следеће функције:

а) $\sin^2 x$; б) $\cos^2 x$; в) $\sin^3 x$; г) $\cos^3 x$;

д) $\cos^5 x$; ђ) $\sin^4 x$; е) $\cos^4 x$; ж) $\sin^5 x$.

756. Доказати идентитет: $\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}(2\cos 2\alpha + 1)$.

757. Доказати идентитете:

а) $\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(\cos\alpha - \cos 3\alpha)$; б) $\sin^3\alpha\cos\alpha = \frac{1}{8}(2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$;

в) $\sin^2\alpha\cos^3\alpha = \frac{1}{16}(2\cos\alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha)$;

г) $\sin^3\alpha\cos^3\alpha = \frac{1}{32}(3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha)$.

758. Показати да је $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4\cos 2 = 1$.

759. Доказати да је $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ = \sqrt{3}$.

760. Применом трансформација производа у збир упростити изразе:

а) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$;

б) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ$.

761. Доказати идентитете:

а) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha$;

б) $4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2(\alpha+\beta) - 1$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos 2\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\alpha$.

762. Ако је $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$, доказати да је $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{2}$.

4.8. Трансформација збира и разлике тригонометријских функција у производ

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,
5. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
   за $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $k, n \in \mathbf{Z}$,
6. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$
   за $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

763. Доказати идентитете:

а) $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$; б) $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

764. Трансформисати у производ:

а) $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ$; б) $\sin 56^\circ - \cos 56^\circ$; в) $\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}$;

г) $\sin\alpha - \cos\alpha$; д) $\sqrt{3} + 2\cos x$; ђ) $2\cos\alpha + 1$;

765. Показати да је:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\alpha$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \cos\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \cos\alpha$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sqrt{3}\sin\alpha$;

д) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$.

766. Упростити изразе: а) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

767. Трансформисати у производ:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$, б) $\sin 20^\circ + \sin 34^\circ + \sin 24^\circ + \sin 30^\circ$.

768. Показати да је $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$.

Доказати идентитете (задаци 769–770):

769. а) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

770. а) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

в) $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x} = \operatorname{tg} 3x$.

Нека су α, β и γ углови троугла. Доказати следеће релације (задаци 771–772):

771. $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$, $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\beta+\gamma)$.

772. $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\beta+\gamma}{2}$.

773. Доказати идентитете:

а) $1+\sin x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; б) $1-\sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

774. Трансформисати у производ:

а) $1-4\cos^2\alpha$; б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x$; в) $3-4\sin^2 x$;

г) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; д) $1-\sin\alpha+\cos\alpha$; ђ) $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ$;

е) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$.

775. Доказати једнакости:

а) $\sec 7^\circ(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ) = 1$;

б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$;

в) $4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ$.

г) $\cos(54^\circ-\alpha) - \cos(18^\circ-\alpha) - \cos(54^\circ+\alpha) + \cos(18^\circ+\alpha) = \sin\alpha$;

д) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

776. Ако је $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$, показати да је $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right) = 6$.

777. Упростити израз $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$.

778. Доказати да је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

779. Одредити услове када важи идентитет $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

780. Доказати да је $\alpha+2\beta = \frac{\pi}{4}$, ако је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7} \wedge \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \wedge \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \wedge \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

781. Одредити $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, ако је

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \wedge \sin\beta = \frac{12}{13} \wedge \sin\gamma = \frac{7}{25} \wedge \alpha,\beta,\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

782. Одредити $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, ако је $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$ и $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{5}$.

783. Одредити $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, ако је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4$ и $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

Доказати једнакости (задаци 784–785):

784. $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$. **785.** $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{12} + \operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12} = 15$.

786. Ако је $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$, показати да је $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) = 2$.

Доказати идентитете (задаци 787–790):

787. $\sin 3\alpha\cos^3\alpha + \sin^3\alpha\cos 3\alpha = \frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

788. $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$.

789. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha} = 2\cos\alpha$.

790. $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}$.

791. Израчунати вредност разломка $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$, ако је $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

792. Одредити $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, ако је $\sin 2\alpha=m$, $m\in(-1,0)$ и $2\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

793. Доказати да из сваке од релација а) и б) следи да је троугао правоугли:

а) $\sin\alpha=\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)+\sin\gamma}$.

794. За углове троугла важи релација $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0$. Доказати да је један угао 60°.

795. За углове троугла важи релација $\sin\alpha=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Доказати да је троугао једнакокраки.

796. Ако углови троугла задовољавају једнакост $\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$, доказати да је троугао правоугли или једнакокраки.

797. Ако су α, β и γ углови троугла и $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=q$, доказати:

а) за $q=2$ троугао је правоугли; б) за $q<2$ троугао је тупоугли;

в) за $q>2$ троугао је оштроугли.

798. Доказати идентитет

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

799. Трансформисати у производ:

а) $a+b$; б) a^2+b^2, где су $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$ и $\dfrac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$.

800. Доказати да, ако за углове α, β и γ неког троугла важи једнакост

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=0,$$

онда је тај троугао једнакокраки.

801. Доказати да из $\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$ следи $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}$.

802. а) Трансформисати у производ $a\sin\alpha+b\cos\alpha$, где су $a,b\in\mathbf{R}$ и $a^2+b^2\neq 0$.

б) Применити резултат из а) на случајеве $a=b=1$ и $a=-b=1$.

803. Трансформисати у производ $4\sin\alpha+3\cos\alpha$.

804. Трансформисати у производ $\sin x+\sin y+\sin z$, ако је $x+y+z=\pi$.

805. Ако је $\cos\alpha+\cos\beta=a$, $a\neq 0$ и $\sin\alpha+\sin\beta=b$, одредити $\sin(\alpha+\beta)$ помоћу a и b.

806. Одредити $\cos(\alpha-\beta)$, ако је $\sin\alpha+\sin\beta=1$, $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$.

Доказати једнакости (задаци 807–808):

807. $\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}35^\circ\operatorname{tg}25^\circ\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}5^\circ$.

808. $\operatorname{tg}117^\circ+\operatorname{tg}118^\circ+\operatorname{tg}125^\circ=\operatorname{tg}117^\circ\operatorname{tg}118^\circ\operatorname{tg}125^\circ$.

809. Израчунати збир: а) $\cos 7^\circ+\cos 79^\circ+\cos 151^\circ+\cos 223^\circ+\cos 295^\circ$;

б) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

810. Доказати да је $\sin(\alpha+2\beta)=3\sin\alpha$, ако је $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, $3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$ и $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

811. Трансформисати у производ $\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}$.

812. Доказати да је $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\beta$, ако је

$$3\sin\alpha=\sin(\alpha+2\beta)\wedge\cos(\alpha+\beta)\neq 0\wedge\cos\beta\neq 0.$$

813. Ако је $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$, $\cos\alpha+\cos\beta\neq 0$, доказати да је

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

814. Ако је $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{1+\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$, доказати да је $\sin(3\alpha+\beta)=7\sin(\alpha-\beta)$.

815. Доказати да је $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3}$, ако је $\sin x+\sin y=2\sin(x+y)$, $x+y\neq 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

816. Наћи $\sin(\alpha+\beta)$, ако је $a\cos\beta+b\sin\beta=a\cos\alpha+b\sin\alpha$, $\alpha-\beta\neq 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

817. Ако је $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ и $f(x)=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$, доказати да је

$$f^2(\beta)=f\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)f\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right).$$

818. Показати да је

$$\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=\frac{1}{2}\sin 25^\circ\operatorname{cosec}5^\circ.$$

Нека су α, β и γ углови троугла. Доказати следеће релације (задаци 819–826):

819. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

820. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1$.

821. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

822. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

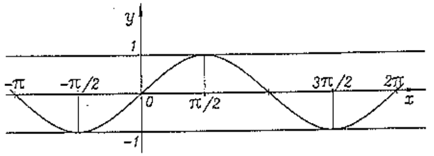
823. $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1$.

824. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

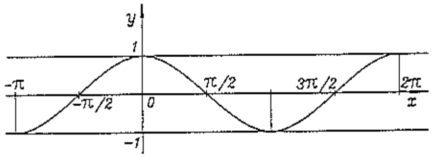
825. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

826. $\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=(-1)^{n+1}4\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma$.

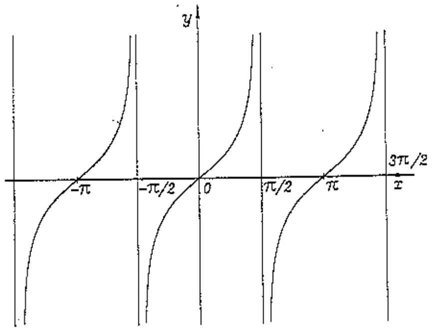
4.9. Основна својства тригонометријских функција



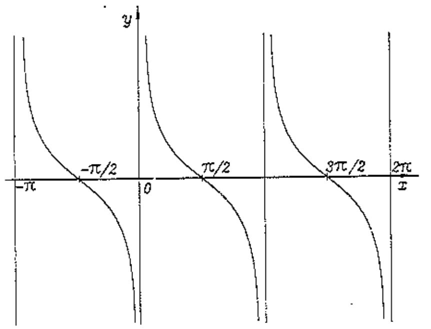
y=sin x



y=cos x



y=tg x



y=ctg x

827. Одредити периоде функција:

а) $f(x)=\sin 2x$; б) $f(x)=\cos\frac{x}{7}$; в) $f(x)=\operatorname{tg}5x$.

828. Одредити период функције $f(x)=a\sin(bx+\varphi)$, где су $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $\varphi\neq 0$ константе.

829. Одредити период функција:

а) $f(x)=\sin 2x-\cos 5x$; б) $f(x)=\sin\frac{3x}{7}+\cos\frac{x}{3}+\operatorname{tg}\frac{2x}{5}$;

в) $f(x)=3\sin 2\pi x$; г) $f(x)=5\cos\left(\frac{\pi}{3}x+4\pi\right)$;

д) $f(x)=2\operatorname{tg}\left(3x-\frac{1}{2}\right)$; ђ) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

830. Дате су функције: а) $f(x)=2\sin x$; б) $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$; в) $f(x)=\operatorname{tg}^2x+1$; г) $f(x)=3\operatorname{ctg}x$. Испитати да ли постоје и у случају потврдног одговора одредити $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(\pi)$.

831. Дата је функција $f(x)=\frac{1}{1-\cos x}$. Испитати да ли постоје и у случају потврдног одговора одредити $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ и $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

832. Испитати парност и непарност функција:

а) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x+\sin x}{\operatorname{ctg}x}$; б) $f(x)=\sin x+\operatorname{cosec}x$;

в) $f(x)=\sin x-\cos x$. г) $f(x)=3^{|\sin x|}$.

Одредити екстремне вредности функција (задаци 833–835):

833. $f(x)=\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x$.

834. а) $f(x)=\sin x+\cos x$; б) $f(x)=\sin x-\cos x$.

835. а) $y=\sin x+2$; б) $y=5-\cos x$.

836. Одредити минимум функције $y=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Испитати ток и нацртати график функција (задаци 837–845):

837. $y=-\sin x$. **838.** $f(x)=\frac{3}{2}-\sin x$. **839.** $f(x)=-\cos 2x$.

840. $y=\sin 2x$. **841.** $y=\sin\frac{x}{2}$. **842.** $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

843. а) $f(x)=\operatorname{cosec}x$; б) $f(x)=\sec x$.

844. а) $y=|\sin x|$; б) $y=|\cos x|$.

845. а) $y=|\operatorname{tg}x|$; б) $y=|\operatorname{ctg}x|$.

846. Одредити екстремне вредности функција:

а) $y=4-3|\sin x|$; б) $y=\frac{1}{2-|\cos x|}$.

847. Одредити период и амплитуду фукције $f(x) = p\cos bx + q\sin bx$.

Испитати ток и нацртати график функција (задаци 848–857):

848. $f(x) = 2\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

849. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

850. $f(x) = \frac{4}{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

851. $f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

852. $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

853. $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

854. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

855. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right)$.

856. $f(x) = \sin x + \cos x$.

857. $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

858. Одредити период функција:

а) $f(x) = \sin^2 x$; б) $f(x) = \sin^2 x\cos x$; в) $f(x) = \sin^3 x$;

г) $f(x) = \cos^4 x$; д) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; ђ) $\sin^6 x + \cos^6 x$;

е) $f(x) = |\sin x|$; ж) $f(x) = |\cos x|$.

Испитати ток и нацртати график функција (задаци 859–864):

859. а) $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$; б) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

860. а) $y = \sin|x|$; б) $y = \operatorname{tg}|x|$.

861. $y = \sin x + |\sin x|$.

862. $f(x) = \sin\frac{|x| - x}{2}$.

863. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 2|\sin x| + 1}$.

864. $f(x) = \cos^2 x$.

865. Испитати да ли је функција $f(x) = \cos\sqrt{2}x + \cos\sqrt{5}x$ периодична.

866. За које целобројне вредности n функција $f(x) = \cos nx \sin\frac{5}{n}x$ има основни период 3π?

867. Функција $f(x) = \cos ax + \cos x$ је периодична ако и само ако је a рационалан број. Доказати.

868. Ако је функција $f(x) = \cos x + \cos a_1 x + \cos a_2 x + \cdots + \cos a_n x$ периодична, доказати да су тада $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рационални бројеви.

869. Одредити екстремне вредности функција:

а) $f(x) = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$;

б) $f(x) = 5\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 11\cos^2 x$.

870. Испитати ток и нацртати график функција:

а) $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$; б) $y^2 = \sin x$.

4.10. Инверзне тригонометријске функције

Ако је $a = \sin b$ и $b \in [-\pi/2, \pi/2]$, онда се број b назива *аркуссинусом* броја a и пише $b = \arcsin a$;

Ако је $a = \cos b$ и $b \in [0, \pi]$, онда се број b назива *аркускосинусом* броја a и пише $b = \arccos a$;

Ако је $a = \operatorname{tg} b$ и $b \in (-\pi/2, \pi/2)$, онда се број b назива *аркустангенсом* броја b и пише $b = \operatorname{arctg} a$;

Ако је $a = \operatorname{ctg} b$ и $b \in (0, \pi)$, онда се број b назива *аркускотангенсом* броја b и пише $b = \operatorname{arcctg} a$.

На тај начин су једнозначно дефинисане инверзне тригонометријске функције:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x, && x \in [-1, 1];\\ y &= \arccos x, && x \in [-1, 1];\\ y &= \operatorname{arctg} x, && x \in \mathbf{R};\\ y &= \operatorname{arcctg} x, && x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

871. Израчунати: а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arccos(-1)$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; г) $\operatorname{arcctg} 0$; д) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; ђ) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\arcsin\frac{\pi}{3}$.

872. Доказати идентитете:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

в) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; г) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

д) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; ђ) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

873. Израчунати:

а) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; б) $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{3}\right)$; г) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right)$.

874. Израчунати:

а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; в) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$; д) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$.

875. Израчунати:

а) $\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{7}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$;

в) $\arcsin\frac{2}{3}-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$; г) $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})-\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2})$.

876. Израчунати:

а) $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))$; б) $\arcsin(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))$.

в) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; г) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

877. Доказати идентитете:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})^2$;

б) $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{7}=\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)$;

в) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Израчунати (задаци 878–879):

878. а) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)$;

б) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}+2\operatorname{arctg}(-2)\right)$;

в) $\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)-\arccos\frac{36}{85}$.

879. а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, $a<0$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$, $b\neq 0$, $\left|\frac{2a}{b}\right|<1$.

880. Доказати да је

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\varphi, & x+y\geq 0,\\ 2\pi-\varphi, & x+y<0,\end{cases}$$

где је $\varphi=\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$.

881. Нацртати графике функција:

а) $y=\sin(\arcsin x)$; б) $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)$; в) $y=\sin(\arccos x)$;

г) $y=\arcsin(\sin x)$; д) $y=\arcsin(\cos x)$.

4.11. Тригонометријске једначине

Једначина	Решења
$\sin x=a$, $\lvert a\rvert\leq 1$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}$ $=\begin{cases}\arcsin a+2\pi k, & \text{за } n=2k,\\ -\arcsin a+\pi(2k+1), & \text{за } n=2k+1, \quad k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$
$\cos x=a$, $\lvert a\rvert\leq 1$	$x=\pm\arccos a+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}$ $=\begin{cases}\arccos a+2\pi k,\\ -\arccos a+2\pi k, \quad k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$
$\operatorname{tg}x=a$ $\operatorname{ctg}x=a$	$x=\operatorname{arctg}a+\pi n, \ n\in\mathbf{Z}$, $x=\operatorname{arcctg}a+\pi n, \ n\in\mathbf{Z}$.

882. Решити по x једначине

а) $\sin x=\sin\alpha$; б) $\cos x=\cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}\alpha$.

Решити једначине (задаци 883–901):[1]

883. $\sin x=\cos x$. **884.** $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

885. а) $2\sin x-\sqrt{3}=0$; б) $\sin 2x-1=0$; в) $2\cos 2x-1=0$;

г) $\cos\pi x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2\cos\frac{x}{8}=\sqrt{2}$; ђ) $2\sin 2x-1=0$.

886. а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; б) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$; в) $\sin 3x+\sin 12^\circ=0$.

887. а) $\sin^2 x+2\sin x=0$; б) $2\sin x\cos x-\sin x=0$.

888. $\cos 3x+\cos 5x=0$. **889.** $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\sqrt{2}$.

890. $\sin x+\cos x=1+\sin x\cos x$. **891.** $\cos 2x-\sqrt{2}\sin x\cos 2x=0$.

---

[1] Од 883 до 901 задатака су једноставије једначине које се уз мале трансформације своде на основни тип једначина.

892. $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0.$

893. $3 \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 0.$

894. а) $\sin^2 x = \frac{3}{4};$ б) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3};$ в) $\cos^2 x = \frac{1}{2}.$

895. а) $2 \sin |x| - 1 = 0;$ б) $2 \sin \left| 2x - \frac{\pi}{3} \right| = \sqrt{3};$ в) $\operatorname{tg} |x - 2| = -1.$

896. $\operatorname{tg}(2x + 1) \operatorname{ctg}(x + 1) = 1.$

897. $\sin 2^x = -\frac{1}{2}.$

898. $\cos(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

899. $\cos x^2 = \frac{1}{2}.$

900. $\sin x = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$

901. Да ли једначина $\sin x = \lg \sin x$ има решења?

Решити једначине (задаци 902–916):[2]

902. $4 \sin 2x \cos 2x + 1 = 0$ на интервалу $(0, \pi)$.

903. $\cos x = \cos 3x$ на интервалу $[0, 2\pi]$.

904. $\cos x - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$ у интервалу $(-\pi, 4\pi]$.

905. $2 \sin^4 x - 2 \cos^4 x - 1 = 0$ на интервалу $[-\pi, \pi]$.

906. а) $2 \sin x + 3 \sin 2x = 0;$ б) $2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0;$
в) $3 \cos x + 2 \sin 2x = 0;$ г) $2 \sin x + 3 \cos 2x - 3 = 0.$

907. а) $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x;$ б) $2 \cos \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{2} = 1;$ в) $1 - 2 \sin \frac{x}{6} = \cos \frac{x}{3}.$

908. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}.$

909. $\cos 3x + 2 \cos x = 0.$

910. $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{5}{2} + \cos 4x.$

911. $2 + \cos 4x = 2 \sin^2 x.$

912. $3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 4 \cos^2 x.$

913. $2 \sin^2 x + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos 2x = \sqrt{3} + 1.$

914. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right).$

915. $3 \operatorname{tg} 3x - 4 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$

916. $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}.$

---

[2] Једначине од 902 до 916 најједноставије се решавају користећи тригонометријске функције двоструког угла, троструког угла и функције половине угла.

Решити једначине (задаци 917–927):[3]

917. а) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0;$ б) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$

918. $\sin 3x + \cos 2x = 1.$

919. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2} \sin x \cos x.$

920. $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x.$

921. $8 \cos^2 x + 6 \sin x - 3 = 0.$

922. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$

923. $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1.$

924. $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$

925. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}.$

926. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3.$

927. $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 1/\cos x.$

Решити једначине (задаци 928–945):[4]

928. $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2} \sin 4x.$

929. $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x.$

930. $\sin 3x \sin 2x = \sin 11x \sin 10x.$

931. $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x.$

932. $\sin 6x + \sin 4x = 0.$

933. $\sin x = \cos 2x.$

934. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

935. $\cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x.$

936. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$

937. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin x = \frac{1}{2}.$

938. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$

939. $\cos 6x + \sin 5x + \sin 3x - \cos 2x = 0.$

940. $\sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x.$

941. $\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6} \sin x.$

942. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right).$

943. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2 \cos 3x$

944. $\sin^2 2x + \sin^2 5x = 1.$

945. $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1.$

946. Одредити решења једначине $\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1$, која припадају интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решити једначине (задаци 947–952):

947. $\sin^2 5x - \sin^2 2x = 0.$

948. $1 - 2 \sin^2 8x = \sin 4x.$

---

[3] Једначине 917 до 927 се после трансформација, уколико је то потребно, своде одговарајућом сменом на алгебарске, а затим на тригонометријске једначине основног типа.

[4] Једначине од 928 до 956 разним трансформацијама своде се на основни тип једначина (на пример, претварање збира у производ, и обрнуто, производа у збир тригонометријских функција).

949. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x.$ **950.** $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}.$

951. $4\sin^2 x\cos x - 4\sin^3 x + 3\sin x - \cos x = 0.$ **952.** $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\cos x - \dfrac{8\pi}{3}\right) = 1.$

Решити једначине (задаци 953–956):

953. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$ **954.** $4\sin x - 6\cos x = 1.$

955. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

956. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1.$

Решити једначине (задаци 957–963):[5]

957. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1.$ **958.** $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2.$

959. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}.$ **960.** $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1.$

961. $\sin 13x + \cos 13x = \sqrt{2}\sin 17x.$ **962.** $12\cos x - 5\sin x = -13.$

963. $\sin x + \cos x = 1.$

Решити системе једначина (задаци 964–971):

964. $\cos x + \cos y = \sqrt{3},\quad x + y = \dfrac{\pi}{3}.$

965. $\sqrt{2}\sin x = \sin y,\quad \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y.$

966. $\sin(x - y) = 2\sin x\sin y,\quad x + y = \dfrac{\pi}{2}.$

967. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y,\quad x - y = \dfrac{\pi}{6}.$

968. $\sin(x + y) = 0,\quad \sin(x - y) = 0.$

969. $\sin x + \cos y = 1,\quad \cos 2x - \cos 2y = 1.$

970. $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2},\quad \sin y\cos x = \dfrac{1}{2}.$

971. $\sin x\sin y = \dfrac{3}{4},\quad \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y = 3.$

4.12. Тригонометријске неједначине

Решити неједначине (задаци 972–993):

972. а) $2\sin x - \sqrt{3} > 0;$ б) $2\cos x + 1 < 0;$ в) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \leq 0;$
г) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} > 0;$ д) $2\sin x + 1 > 0;$ ђ) $2\sin x - \sqrt{3} \leq 0.$

---

[5] Једначине $a\sin x + b\cos x = c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$ (од 957 до 963).

973. а) $\sin x - \cos x > 0;$ б) $\sin x - \cos x < 0.$

974. $\sin x\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{1}{2}.$

975. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x > 0.$ **976.** $\cos 2x - \sin 2x \geqslant 0.$

977 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **978.** $2\sin x\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

979. $\sin(3x - 1) < -\dfrac{1}{2}.$ **980.** $\operatorname{ctg}(\pi - x) < -1.$

981. а) $\cos x - \sin x < 1;$ б) $\operatorname{tg} x - \sin x > 0.$

982. $\sin x + \cos 2x > 1.$ **983.** $|\sin x| > \dfrac{1}{2}.$

984. $\sin x + \sin 3x \geq 0.$

985. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x \geq 1.$

986. а) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0;$ б) $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0;$
в) $4\cos^2 x - (2\sqrt{3} + 2)\cos x + \sqrt{3} < 0;$ г) $\sin^2 x - \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{4} < 0.$

987. а) $\cos^4 x + 4\sin^2 x \geq 2\sin 2x\cos x;$ б) $\sin^2 x + \cos x + 1 < 0.$

988. а) $1 - \sin 2x \leq \cos x - \sin x,\ x \in [0, 2\pi];$
б) $\sin 2x - \sin x > 0,\ x \in [0, 2\pi];$
в) $\sqrt{2}\ \cos x\operatorname{tg} x - \sqrt{6}\ \cos x + \operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0,\ x \in [0, 2\pi].$

989. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} < 4\operatorname{tg} x;$ б) $\sin 4x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x > 1;$
в) $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0;$ г) $\cos 2x > \cos x,\ x \in [0, 2\pi).$

990. $\sin 2x > \cos x.$ **991.** $(\sqrt{2 - 2\cos x} - 1)\cos x \geq 0.$

992. $\sin x + \sin 3x > \sin 2x + \sin 4x,\ 0 \leq x < 2\pi.$

993. а) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0;$
б) $\sin^3 x\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) > \dfrac{3\sqrt{3}}{8};$
в) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1;$
г) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}.$

Решити једначине (задаци 994–1006):

994. $2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x.$

995. а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

996. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

997. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}=0$.

998. $\operatorname{tg} 3x \cos x=0$.

999. $11 \operatorname{ctg} x-5 \operatorname{tg} x=\frac{16}{\sin x}$.

1000. $|\sin x|=\sin x+2\cos x$.

1001. $|\cos x|=\cos x-2\sin x$.

1002. $|\operatorname{tg} x|=\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}$.

1003. $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^8 x-\cos^8 x$.

1004. $\log_{0,1}\sin 2x+\lg\cos x-\lg 7=0$.

1005. $2\cos x=\sqrt{2+\sin 2x}$.

1006. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$.

1007. Одредити она решења једначине $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$ која су у скупу $[3/4,1]$.

1008. Одредити све вредности x, које задовољавају једначину

$$\sin x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)+\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$$

у интервалу $(-\pi, 4\pi/3)$.

1009. Одредити она решења једначине $1-5\sin x+2\cos^2 x=0$ која задовољавају неједнакост $\cos x\geq 0$.

Решити једначине (задаци 1010–1016):

1010. $\arcsin 3x=\operatorname{arctg} 5x$.

1011. $\arccos x=\operatorname{arcctg}\frac{15}{16}x$.

1012. $\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(x-1)=\frac{\pi}{4}$.

1013. $2\arcsin x=\arccos x$.

1014. $\arcsin 2x+\arcsin x=\frac{\pi}{3}$.

1015. $\arcsin x=\arccos x$.

1016. а) $6\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\pi$;
б) $4\arcsin x+\arccos x=\pi$;
в) $5\operatorname{arctg} x+3\operatorname{arcctg} x=2\pi$;
г) $3\arcsin^2 x-13\arcsin x+4=0$;
д) $3\arccos x+11=0$.

1017. Решити неједначине:
а) $\arcsin(\sin 5)>x^2-4x$;
б) $\arcsin x>\arccos x$;
в) $\operatorname{arctg} x>\operatorname{arcctg} x$.

1018. Дата је једначина $(\arcsin x)^3+(\arccos x)^3=a\pi^3$.

а) Показати да једначина нема решења ако је $a<\frac{1}{32}$.

б) Решити једначину у случајевима $a=\frac{1}{8}$ и $a=\frac{7}{8}$.

в) Одредити број решења једначине у зависности од параметра a.

Решити једначине (задаци 1019–1026):

1019. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=m;\quad m\in\mathbf{R}$.

1020. $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1021. $a\sin x=b\cos\frac{x}{2};\quad a,b\in\mathbf{R}$

1022. $\sin x+\cos x=a;\quad a\in\mathbf{R}$.

1023. $\sin^4 x+\cos^4 x=a;\quad a\in\mathbf{R}$.

1024. $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0;\quad a\in\mathbf{R}$.

1025. $\cos\left(mx+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(mx-\frac{\pi}{6}\right)=a;\quad a,m\in\mathbf{R}$.

1026. $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=m;\quad m\in\mathbf{R}$.

Решити неједначине (задаци 1027–1029):

1027. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x\leq a$, $a\in\mathbf{R}$.

1028. а) $1-\sin x\cos x\leq\cos^2 x$;
б) $2\cos x+3\geq\frac{2}{\cos x}$;
в) $2\sin x\cos 2x+\cos^2 x\geq 3\sin^2 x+\sin x$.

1029. а) $\frac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x}>\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}$;
б) $\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}>0$;
в) $\frac{\cos x}{1-3\cos x}<\frac{1-\cos x}{1-9\cos^2 x}$.

1030. Доказати неједнакост: $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geq 1$.

1031. Доказати да за $x_1\neq x_2$ на интервалу $(0,\pi)$ важи неједнакост

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}.$$

1032. Нека су α, β и γ углови троугла. Доказати неједнакости:

а) $1\leq\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}$;

б) $2<\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3}{2}$.

1033. Нека су α, β и γ углови оштроуглог троугла. Доказати неједнакости:

а) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$;
б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

4.13. Синусна теорема, косинусна теорема и примена

Синусна теорема:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Косинусна теорема:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Површина троугла:

$$P=\frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

Решити троугао када су дати његови елементи (задаци 1034–1037):

1034. а) $a=31$, $\alpha=54°15'$, $\beta=76°20'$; б) $b=6$, $\alpha=37°25'$, $\gamma=102°45'$;
в) $c=10$, $\alpha=62°22'$, $\beta=28°52'$.

1035. а) $b=18$, $c=13$, $\alpha=44°30'$; б) $a=13,48$, $c=7,02$, $\beta=138°27'$;
в) $a=738$, $b=739$, $\gamma=60°15'$.

1036. а) $a=10$, $b=18$, $\alpha=28°35'$; б) $a=9$, $c=16$, $\gamma=81°20'$;
в) $b=0,75$, $c=1,28$, $\beta=43°17'$.

1037. а) $a=10$, $b=18$, $c=9$; б) $a=2$, $b=3$, $c=4$.

1038. Решити троугао без употребе рачунских помагала:
а) $a=2\sqrt{2}$, $\alpha=45°$, $\beta=120°$; б) $a=3+\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}$, $\alpha=75°$;
в) $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3-\sqrt{3}$; г) $b=\sqrt{6}$, $c=3+\sqrt{3}$, $\alpha=45°$.

1039. У троуглу ABC је $\alpha=30°$, $a=\sqrt{2}$, $b=2$. Наћи остале углове троугла.

1040. Дужине страница једног троугла су $a-2$, a и $a+2$, а један угао троугла једнак је 120°. Одредити a.

1041. Нека је у троуглу ABC: $c=2$, $a:b=\sqrt{7}:3$ и $\alpha=60°$. Израчунати странице троугла.

1042. Ако је у троуглу ABC: $a+c=11$, $\beta=30°$ и површина $P=7$, израчунати дужине страница троугла.

1043. У троуглу ABC је $a=\sqrt{19}$, $b+c=7$ и $\alpha=60°$. Израчунати дужине страница b и c и површину троугла.

1044. Израчунати дужину полупречника описаног круга троугла ABC чије су странице $AB=6\,\mathrm{cm}$ и $AC=10\,\mathrm{cm}$, а висина $AD=5\,\mathrm{cm}$.

1045. У оштроуглом троуглу су дате две странице $a=15$, $b=13$ и полупречник описаног круга $R=8{,}125$. Наћи дужину треће странице.

1046. Ако је површина троугла $P=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$, полупречник описаног круга $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$, а најмања страница $a=3$, наћи дужине осталих страница троугла.

1047. У оштроуглом троуглу задате су странице $a=1$, $b=2$ и површина $P=\dfrac{12}{13}$. Израчунати збир квадрата синуса углова тог троугла.

Решити троугао ако су дати његови елементи (задаци 1048–1049):

1048. а) R,β,γ; б) $b+c,a,\beta-\gamma$; в) $b+c,a,\alpha$;
г) $b-c,a,\beta-\gamma$; д) $b-c,R,\alpha$; ђ) a,R,h_b;
е) $S,b+c,\alpha$; ж) S,a,α.

1049. а) $s=24,5$; $\alpha=18°$; $\gamma=12,15°$; б) $R=3,5$; $b+c=8$; $\alpha=51°10'$;
в) $S=86$; $a=12$; $b^2+c^2=574$; г) $R=26$; $a=42$; $h_b=31$;
д) $a=12{,}7$; $\alpha=80°10'$; $b:c=7:6$.

1050. Израчунати оштре углове трапеза чије су основице $a=15$, $c=7$, а краци $b=9$ и $d=6$.

1051. Наћи угао између дијагонала правоугаоника чија је површина $100\,\mathrm{cm}^2$, а дијагонала има дужину $21\,\mathrm{cm}$.

1052. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ чије су странице и дијагонала AC познате: $AB=32$, $BC=34$, $DA=20$, $AC=17$. Израчунати угао између дијагонала.

1053. Доказати да у сваком троуглу важи:

$$1^\circ\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\qquad \text{(Тангенсна теорема).}$$

$$2^\circ\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}\qquad \text{(Молвајдове формуле).}$$

1054. Доказати да је косинусна теорема последица синусне теореме. (Односно, доказати, да ако за реалне бројеве $a,b,c>0$, α,β,γ, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ важи $\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}=\dfrac{\sin\gamma}{c}$, онда важи $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$). Да ли важи обрнуто?

1055. Доказати да за угао α троугла ABC важи:

$$1^\circ\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};\qquad 2^\circ\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};$$

$$3^\circ\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

1056. Доказати следеће формуле за површину троугла ABC:

$1^\circ\ S = \dfrac{abc}{4R}$; $2^\circ\ S = sr$;

$3^\circ\ S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Херонова формула).

1057. Тачке A и B се налазе на једној обали, а тачке C и D на другој обали реке. Израчунати одстојање тачака A и B ако је мерењем нађено: $CD = 2570\,\mathrm{m}$, $\measuredangle BCD = 79^\circ 34'$, $\measuredangle ACD = 32^\circ 31'$, $\measuredangle BDC = 33^\circ 34'$, $\measuredangle ADC = 78^\circ 45'$.

1058. Одстојање од тачке M до тачака A, B и C не могу се директно мерити, али је могуће измерити $AB = c$, $AC = b$, $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle AMN = \beta$, $\measuredangle AMC = \varepsilon$, а зна се и да је четвороугао $CABM$ конвексан. Како се из ових података може израчунати MA, MB и MC? Колико она износе ако је $c = 123{,}3\,\mathrm{m}$, $b = 282{,}6\,\mathrm{m}$, $\alpha = 78^\circ 35'$, $\delta = 28^\circ 44'$, $\varepsilon = 41^\circ 16'$?

1059. У једнакокраком трапезу дијагонала d гради са основицом угао α. Доказати да се површина тог трапеза може рачунати по формули $P = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$.

1060. Доказати да у сваком троуглу важи

$$a(\sin\beta - \sin\gamma) + b(\sin\gamma - \sin\alpha) + c(\sin\alpha - \sin\beta) = 0.$$

1061. У троуглу је $\alpha : \beta = 1 : 2$ и $a : b = 1 : \sqrt{3}$. Доказати да је тај троугао правоугли.

1062. а) Ако је површина троугла $S = a^2 - (b-c)^2$, одредити угао α. б) Ако је површина троугла $S = \frac{2}{5}bc$, одредити страницу a.

1063. Одредити дужину полупречника описаног круга једнакокраког троугла чији је угао при врху $\beta = 120^\circ$, а обим а) $2s = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$; б) $2s = \dfrac{6}{2-\sqrt{3}}$.

1064. Троугао је оштроугли, правоугли или тупоугли према томе да ли је израз

$$E = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

позитиван, једнак нули или негативан. Доказати.

1065. У паралелограму $ABCD$ је дат оштар угао α и одстојања m и p тачке пресека дијагонала од непаралелних страница AB и BC. Израчунати дужине дијагонала паралелограма.

1066. Ако за углове и странице троугла важи:

а) $a = 2b\cos\gamma$, доказати да је троугао једнакокраки.

б) $(b+c+a)(b+c-a) = 3bc$, доказати да је $\alpha = 60^\circ$.

1067. Ако су a и b дужине страница, а d_1 и d_2 дијагонале паралелограма, доказати да је $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

1068. Нека су d_1 и d_2 дужине дијагонала паралелограма са оштрим углом од 60°. Наћи однос дужина страница $\dfrac{a}{b}$ ако је а) $\dfrac{d_2^2}{d_1^2} = 3$; б) $\dfrac{d_2^2}{d_1^2} = \dfrac{19}{7}$.

1069. Доказати да код сваког паралелограма важи $a^2 - b^2 < ef$, где су a и b дужине страница, а e и f дијагонале паралелограма.

1070. Нека је S површина троугла ABC и γ угао код темена C. Одредити странице a и b тако да страница c буде што је могуће краћа.

1071. Доказати да у сваком троуглу важи $a^2 = (b+c)^2 \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + (b-c)^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1072. У унутрашњости троугла ABC дата је тачка O тако да је $\measuredangle ABO = \measuredangle BCO = \measuredangle CAO = \alpha$. Доказати да је $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4P}$, где су a, b, c дужине страница и P површина троугла ABC.

1073. Нека је страница једнакостраничног троугла ABC дужине a и нека су тачке D и E на страницама BC, односно AB, тако да је $BD = a/3$, $AE = DE$. Израчунати дужину дужи CE.

1074. Ако је a дужина странице BC троугла ABC, α одговарајући угао и O центар круга уписаног у троугао, наћи полупречник круга описаног око троугла BCO.

1075. Нека је AD тежишна дуж једнакокраког троугла ABC $(AB = BC)$. Наћи $\measuredangle BAD$, ако је познат угао β код темена B.

1076. Дат је једнакокраки троугао ABC $(AB = AC)$ такав да је $\measuredangle A = 80^\circ$. У унутрашњости троугла одређена је тачка M таква да је $\measuredangle MBC = 30^\circ$, а $\measuredangle MCB = 10^\circ$. Израчунати $\measuredangle AMC$.

1077. Вештачки сателит креће се по кружној путањи око Земље на висини h изнад Земље. Прошао је кроз зенит Земљине тачке A и после t секунди опажен је из тачке A под углом α према хоризонту. Одредити време једног пуног обиласка сателита око Земље. Решити конкретан пример: $h = 250\,\mathrm{km}$, $\alpha = 46^\circ 30'$, $t = 30\,\mathrm{s}$, $R =$ (полупречник Земље) $= 6370\,\mathrm{km}$.

1078. Изразити h_a, l_a, t_a, r, r_a и R преко страница a, b и c троугла.

1079. У оштроуглом $\triangle ABC$ са ортоцентром H је $AH = x$, $BH = y$, $CH = z$. Доказати једнакости:

а) $ayz + bzx + cxy = abc$; б) $(y+z)a + (z+x)b + (x+y)c = 4sR$;

в) $ax + by + cz = 4S$; г) $x + y + z = 2(r+R)$.

1080. Нека су O и I центри описаног и уписаног круга троугла ABC. Доказати да је $OI^2 = R(R-2r)$.

1081. У једнакокраком $\triangle ABC$ угао при врху B једнак је 20°. На крацима AB и BC дате су, редом, тачке Q и P такве да је $\measuredangle ACQ = 60^\circ$, $\measuredangle CAP = 50^\circ$. Израчунати $\measuredangle CQP$.

1082. Нека су P, Q и R редом тачке у којима нека права сече странице BC, CA и AB (или њихове продужетке). Доказати да је

$$\frac{PB \cdot QC \cdot RA}{PC \cdot QA \cdot RB} = 1 \qquad \text{(Менелајева теорема).}$$

1083. На страницама $\triangle ABC$ налазе се тачке P, Q и R, при чему се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки. Доказати да је

$$\frac{AR \cdot BP \cdot CQ}{RB \cdot PC \cdot QA} = 1 \qquad \text{(Чевина теорема).}$$

1084. Угао C троугла ABC је двема правама подељен на три једнака дела. Одсечци тих правих унутар троугла су у односу $m : n$ $(m < n)$. Израчунати дужине тих одсечака ако је $AC = b$, $BC = a$ $(a < b)$.

1085. Доказати да за сваки троугао важи неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

1086. Изразити дијагонале тетивног четвороугла преко његових страница. Извести одатле *Птоломејеву теорему*: производ дијагонала тетивног четвороугла једнак је збиру производа наспрамних страна.

1087. Нека су d_1 и d_2 дијагонале конвексног четвороугла, а φ угао који оне граде. Доказати да је површина тог четвороугла $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

1088. Око датог правоугаоника, чије су странице a и b, описати нови правоугаоник који ће имати задату површину m^2. За које вредности m задатак има решења?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Глава I – Степеновање и кореновање

1. а) $\frac{1}{8}, -\frac{1}{3}, 1, 5$; б) $4, \frac{27}{8}, 6, \frac{51}{16}$; в) $1, 1, 1, 0$; г) $285 \cdot 10^{-6}, 21 \cdot 10^4$;
д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-4} = 66\,066.$

2. а) 100; б) 1; в) 1/4; г) 1/3; д) $(2^3)^{1000} \cdot (3^2)^{1000} = 8^{1000} \cdot 9^{1000} = (8 \cdot 9)^{1000} = 72^{1000}$;
ђ) $\left(\frac{3}{8}\right)^{200}$; е) $\left(\frac{8}{25}\right)^{1000}$.

3. а) x^{-1}, x^{-4}; б) a^{-5}, a^{-1}, a^5; в) a^6b^{-8}, ab^3; г) $\frac{6}{25}a^5b, a^{-3}b^{57}$.

4. а) x^{-1}; б) p^{-1}; в) $a^{-7}b^5$; г) $\frac{1}{9} - \frac{1}{8}x^{-1} - x^{-5} + \frac{9}{8}x^{-6}$.

5. а) $6a^{-2}$; б) b^6; в) c^{3n+2}; г) $4d^{2x-2}$; д) $(a-x)^7$; ђ) $30x^{5a}$; е) a^{4p-m}; ж) -1; з) m^{-20}; и) 7; ј) $x+y$.

6. а) $\left(\frac{a}{b}\right)^8$; б) $\frac{5ab}{4d}$; в) $\frac{3a^{3-x}b}{16c^{5y-3}d^4}$; г) $3x^{-1}y^{-3}$; д) $\frac{5x^{2n-1}}{9y^3z}$; ђ) $\frac{5a^2d}{4b^{2n-2}c}$.

7. а) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n-1}$; б) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-6}$; в) $\left(\frac{1+y}{x-3}\right)^n$; г) $(x-y)^n$; д) 1.

9. а) $(a^{-1}+b^{-1}) : (a^{-1}-b^{-1})^{-1} = \dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{b-a}{b+a}$; б) $-ab$; в) $2x$; г) 1.

10. а) $-\frac{2+x^4}{x^3}$; б) $1+2x$; в) $\frac{(a-b-c)a}{2}$; г) $-\frac{ab}{(a+b)^2}$; д) $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$.

11. а) 1; б) 0; в) 0; г) 1; д) $250^x - 54^x$; ђ) $125^m - 64^m$.

13. а) $\frac{a^3}{2(a-1)}$; б) $\frac{1+2^{2n}}{2^{n+1}}$; в) $\frac{1+a}{1-a}$; г) $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2-\sqrt{3}}} =$
$\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3} = 1.$

14. а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{1}{125}$; в) 81; г) 2; д) $\frac{1}{8}$; ђ) 16; е) $\frac{76}{9}$; ж) $\frac{4}{3}$; з) 8.

15. а) 1; б) 3; в) $-\frac{15}{13}$.

17. а) $x^{5/12}$; б) $x^{1/4}y^{2/15}z^{1/4}$; в) $x^{-1/6}$; г) x^{-1}.

18. а) $5b^2\sqrt{a}$; б) $\sqrt[3]{8a^3b}$; в) $2a\sqrt[3]{2ab^2}$; г) $a^2b^2\sqrt[3]{ab}$.

19. а) $\sqrt[an]{x^{n^2-a^2}}$; б) $\sqrt[n]{a}$; в) $\frac{1}{ab^2}$; г) $\sqrt[12]{z^5}$; д) $\frac{1}{a\sqrt[n^2]{b}}$; ђ) $\sqrt[3]{a^2}$; е) $\sqrt[12]{x^7}$; ж) $\sqrt[3]{x^7}$.

20. а) 1° 4, 2° 3, 3° $\sqrt[4]{30}$; б) 1° $4a^2$, 2° $5a^2b$; в) 1° 1, 2° a; г) a; д) 1° 1, 2° 7; ђ) $a-b$; е) 1° 2, 2° 5, 3° 2; ж) 1° $a\sqrt[3]{3}$, 2° $4\sqrt[12]{a^5}$, 3° b; з) 1° a^2b^3, 2° $\sqrt[m]{a^n}$.

21. а) $3\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$, $5\sqrt{3}=\sqrt{75}$. Како је $\sqrt{45}<\sqrt{75}$, то је $3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$; б) $0{,}5\sqrt{2}>0{,}3\sqrt{3}$; в) $7\sqrt{0{,}2}>3{,}5\sqrt{0{,}4}$; г) $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$, па је $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

22. Изрази под а), в) и ђ) немају смисла јер је поткорена величина негативна. Остали корени су дефинисани.

23. а) $x\geq 0$; б) $x\leq 0$, в) $a=0$, г) за све a; д) за све x: ђ) за $x\leq 5$; е) $x\geq 12$, ж) за све a и $b\geq 0$; з) $x\geq -27$; и) за $y\geq 0$ и све x, а ако је $y<0$ биће за $x\geq\sqrt{|y|^3}$; ј) $x\leq 30$; к) $-1<x\leqslant 2$.

24. а) 1° $\sqrt{0{,}64\cdot 49}=\sqrt{0{,}64}\cdot\sqrt{49}=0{,}8\cdot 7=5{,}6$, 2° 1,32, 3° 3,25, 4° $\frac{28}{27}$, 5° $\frac{25}{2}$; б) 1° $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$, 2° 120, 3° 30, 4° 2,025, 5° $\frac{25}{8}$.

25. а) $\sqrt{25\cdot 7\cdot 9}=\sqrt{5^2\cdot 7\cdot 3^2}=5\cdot 3\sqrt{7}=15\sqrt{7}$; б) 16,8; в) $15\sqrt{2}$; г) $150\sqrt{3}$; д) $4ab^2$; ђ) $4a^2b^6c\sqrt{3ac}$; е) $3b^{10}c^n\sqrt{7ab}$; ж) $(a+b)\sqrt{a+b}$; з) $2a^3(a+b)^{2n}\sqrt{2a}$.

26. а) 1° $\sqrt{\frac{100}{81}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{81}}=\frac{10}{9}$, 2° $\frac{3}{2}$, 3° $\frac{28}{5}$, 4° $\frac{165}{26}$, 5° $\frac{2000}{21}$; б) 1° $\sqrt{72:2}=\sqrt{36}=6$, 2° 7, 3° 0,9, 4° 0,6, 5° 0,7; в) 1° 5^2, 2° $2^3|a|$, 3° $6a^4b^2$, 4° $\frac{|x|^5}{3y^8}$, 5° $\frac{a^6|m|^3}{n^{10}}$.

27. а) $5\sqrt{7}=\sqrt{5^2\cdot 7}=\sqrt{175}$; б) $\sqrt{2{,}5}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{\frac{35}{2}}$; д) $\sqrt{x}$; ђ) $\sqrt{ax}$; е) $\sqrt{b^{10}}$; ж) $\sqrt{x^3y}$; з) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; и) $\sqrt{\frac{(x+y)^2(a-b)^2}{(a-b)^2(x+y)x}}=\sqrt{\frac{x+y}{y}}$.

29. а) $2\sqrt{2}$; б) $19\sqrt{2}$; в) $6\sqrt[3]{4}$; г) $6c\sqrt[3]{c}$; д) 0; ђ) $4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}$.

30. а) $a^{-169/60}b^{-31/30}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}=a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$.

31. а) 1; б) 1.

32. Нека је $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x$, $x\geq 0$. Тада је

$$x^2=2(A+\sqrt{A^2-B})=4\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2},$$

па је

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}. \tag{1}$$

На исти начин добија се

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

33. а) $\sqrt{3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6}}=\sqrt{3\sqrt{3}\pm\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}}\pm$ $\pm\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt{2}\pm 1$; в) $\sqrt{3}\pm 1$; г) $2\pm\sqrt{3}$; д) $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}$; ђ) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+1)$; е) $\sqrt{5}-2$; ж) 7.

35. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-2}=\frac{1}{\sqrt{2}-2}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}+2}{2-4}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-1$; б) $10-5\sqrt{3}$; в) $8\sqrt{2}+3\sqrt{14}$; г) $2\sqrt{5}+4$; д) $\frac{6+\sqrt{11}}{50}$; ђ) $\frac{2\sqrt{70}-17}{3}$; е) 1° $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$; ж) 2° $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

37. а) $\frac{a}{\sqrt[m]{b}}=\frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{b^{m-1}}}=\frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{\sqrt[m]{b^m}}=\frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{b}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$;

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^3}\pm\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b}$.

38. а) $\sqrt{6+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{6+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{5}}=\sqrt{31}$; б) 1.

39. а) $1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; д) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$.

40. а) 6; б) 7; в) 1; г) 1; д) 9; ђ) -3.

41. Изрази су једнаки.

42. а) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$, $x\geq y\geq 0$; б) $\sqrt{b-a}-\sqrt{a}$, за $b\geq 2a$, односно $\sqrt{a}-\sqrt{b-a}$, за $0\leq a\leq b\leq 2a$.

43. б) Како је $\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}=\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}+1\right)^2$, $\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}=\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$, добијамо $\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\sqrt{2}-1}+1+1-\sqrt{\sqrt{2}-1}=2$.

44. а) 1° $\frac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}$, 2° $\sqrt[3]{2}-1$;

б) 1° $\dfrac{4\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{6}+9\sqrt[3]{9}}{97}$, 2° 1;

в) 1° $(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8})$, 2° $(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 3° $\dfrac{(3+\sqrt{2})^5}{7^5}$;

г) 1° $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$, 2° $\dfrac{(30-2\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{26}$, 3° $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)$,
4° $\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}$;

д) 1° $\dfrac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$, 2° $\dfrac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$, 3° $\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{6}+1)}{5}$;

ђ) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

45. а) $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a}$; б) $2(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})(3+\sqrt{2})$;
в) $(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{13}+3)$; г) $\dfrac{(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{3})}{-2}$; д) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$;
ђ) $\dfrac{(2\sqrt{6}+1)(3-4\sqrt{2})}{23}$.

46. а) $-\dfrac{(\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+2)}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}}$;
в) 0; г) $\sqrt{2}$; д) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

47. а) Како је $9+4\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}+5=4+4\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=(2+\sqrt{5})^2$, то је $A=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=-2$.
б) Искористити чињеницу да је $9-4\sqrt{5}=4-4\sqrt{5}+5=(2-\sqrt{5})^2$. Резултат: $A=0$.

48. а) $(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.
б) $\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{(2^2-(\sqrt{3})^2)^2(2+\sqrt{3})}=\sqrt[6]{2+\sqrt{3}}$.

49. а) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)$; б) Како је $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$, то је $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}=1$; в) Доказати да је $\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$. Резултат: 3;
г) $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; д) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}$; ђ) $1+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; е) 2.

50. а) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$;
б) 1; в) 2; г) $2\sqrt{3}$.

51. $a<b$.

52. а) 0; б) 2; в) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

53. а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{3}{5}$; в) $\dfrac{31}{3}$; г) $\sqrt[12]{32}$; д) $2\sqrt[6]{18}$; ђ) 0; е) 0.

55. а) $\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$; б) 2; в) 0.

56. а) $t\in\{0,1,2,3,4,5\}$; б) $t\in\{-5,-4,-3,-2,-1,0\}$.

57. а) x; б) $-x$; в) x^2; г) $-x^3$; д) y^6; ђ) $-y^3$.

58. а) $-(x+1)$; б) $x+7$; в) $2-x$; г) $x-2$; д) $3-x$.

59. а) $|x-1|+|x+1|=x-1+x+1=2x$; б) $|x-3|+|x+3|=-(x-3)+x+3=6$; в) $|x+1|+|x+2|=-(x+1)-(x-2)=-2x+1$; г) $|x-3|+|x-2|-|x-5|=-(x-3)+x-2+(x-5)=x-4$.

60. а) $-6x^2y$; б) $8x^4y^3$; в) $\dfrac{-1}{9x^3}$; г) $\dfrac{-a}{b^2}$; д) $\dfrac{-7}{5a^3b^6}$; ђ) $\dfrac{-4}{b+3}$; е) $a^3(a+1)^5$; ж) $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$.

62. а) $5^{1/2}-1$; б) $\dfrac{80}{3}$; в) 0; г) $-2/(a+\sqrt{a})$, $(\sqrt{5}-5)/10$.

64. а) a^2+ab+b^2, 2,52; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; в) 1; г) 0; д) $2\sqrt{a-1}$ за $a>2$; 2 за $1\leq a\leq 2$.

65. а) $x-1$; б) $2\sqrt[4]{p}$; в) $x+1$; г) $\sqrt{x}$; д) $\dfrac{\sqrt{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$.

67. а) 1; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$; в) $\sqrt{bc}$; г) $\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$; д) $\dfrac{m}{n}$; ђ) $\dfrac{1}{n}$.

68. а) $-\dfrac{1}{1+\sqrt{p}}$; б) 0; в) 1; г) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$; д) $\dfrac{a+b}{b-a}$.

69. а) $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}-\dfrac{1-a^{-2}}{\sqrt{a}+a^{-1/2}}-a^{1/2}=\dfrac{a^3-1}{a\sqrt{a}(a-1)}-\dfrac{a^2-1}{a\sqrt{a}(a+1)}-\sqrt{a}=\dfrac{a^2+a+1}{a\sqrt{a}}-\dfrac{a-1}{a\sqrt{a}}-\sqrt{a}=\dfrac{a^2+2-a^2}{a\sqrt{a}}=\dfrac{2}{a\sqrt{a}}$; б) $\dfrac{1}{b^2-1}$; в) 1; г) 1, ако је $a>0$, $b>0$, $a\neq b$; -1 ако је $a<0$, $b<0$, $a\neq b$; д) a^2+ab+b^2; ђ) $3\sqrt{b}$.

70. а) $-i$; б) $1+2i$; в) $1-2i$; г) 1.

71. а) $(2i)^2+(-2i)^4=4i^2+(-2)^4\cdot i^4=-4+16=12$; б) $(1+i)^4+(1-i)^4=((1+i)^2)^2+((1-i)^2)^2=(1+2i+i^2)^2+(1-2i+i^2)^2=(2i)^2+(-2i)^2=-8$; в) $-1-i$;
г) $-22-7i$;
д)

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{500}+\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{500}$$
$$=\left(\frac{2i}{2}\right)^{500}+\left(-\frac{2i}{2}\right)^{500}=i^{500}+(-i)^{500}=1+1=2;$$

ђ) Уочити да је $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=-1$. Резултат: 2.

72. а) $(1+i)^{50}=((1+i)^2)^{25}=(2i)^{25}=2^{25}\cdot i^{25}=2^{25}i$; б) $(i-1)^{100}=((1-i)^2)^{50}=(-2i)^{50}=(-2)^{50}\cdot i^{50}=-2^{50}$.

73. а) 25; б) $\dfrac{85}{9}$; в) $\dfrac{37}{9}$; г) $\dfrac{13}{25}$; д) $-(a^2+b^2)$; ђ) 1.

74. а) $26+7i$; б) $\dfrac{7}{3}+\dfrac{11}{8}i$; в) $2x+3y+(3x-2y)i$; г) $ac+bd+(bc-ad)i$; д) $\dfrac{17+9i}{7-i}\cdot\dfrac{7+i}{7+i}=\dfrac{119+17i+133i-19}{50}=2+3i$; ђ) $-1-2i$; е) $5-i$; ж) $\dfrac{1}{2}+i$.

75. а) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1=i^2+1=0$; б) $1-i\sqrt{3}$.

76. $29-8i$; $29+8i$; 0; 0.

77. а) $\dfrac{15}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}=\dfrac{15(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}i)^2}=\dfrac{15(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{2-3i^2}=$ $\dfrac{15(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{5}=3(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$; б) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $-\dfrac{4}{27}-\dfrac{11\sqrt{5}}{27}i$; г) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$; д) $-\dfrac{1}{2}i$; ђ) $-i$.

78. а) $17+2i$; б) $1-i$; в) $\dfrac{7-i}{10}$; г) i.

79. а) $z=i$; б) $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$; г) $z=\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$.

80. а) Из $(2+3i)x+(3+2i)y=1$ добијамо $(2x+3y)+i(3x+2y)=1$, а на основу дефиниције једнакости комплексних бројева имамо $2x+3y=1$ и $3x+2y=0$, одакле је $x=-\dfrac{2}{5}$ и $y=\dfrac{3}{5}$. б) $x=-5$, $y=8$; в) $x+iy=\dfrac{1-2i}{1+2i}=\dfrac{(1-2i)^2}{5}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$; г) $x=11$, $y=-2$.

81. а) $x=1$, $y=1$; б) $x=2$, $y=4$; в) $x=-\dfrac{4}{11}$, $y=\dfrac{2}{11}$; г) $x=-5$, $y=-1$.

82. а) $x=1{,}2$, $y=1{,}6$; б) $x=0$, $y=7$. **83.** $z=-1-i$.

85. а) $z_1+z_2=3-2i$, $z_1z_2=37-9i$, $z_1-z_2=1+12i$, $\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{33}{50}+\dfrac{19}{50}i$; б) $z_1+z_2=2\sqrt{2}$, $z_1z_2=5$, $z_1-z_2=-2\sqrt{3}i$, $\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}i$.

86. а) $z=\dfrac{8}{53}+\dfrac{3}{106}i$; б) $z=2i$; в) $z=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$; г) -1.

87. а) $\dfrac{19-4i\sqrt{5}}{21}$; б) 4096; в) $-\dfrac{4}{3}$; г) $\dfrac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot 2bi$; д) $\dfrac{3x^2-1}{2x}$; ђ) $-\dfrac{i}{4}$.

88. а) На основу формуле $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, добијамо да је $|z|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$. б) $|z|=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2}=7$; в) $|z|=1$; г) $|z|=\sqrt{85}$; д) $|z|=\sqrt{17}$; ђ) $|z|=\dfrac{\sqrt{1450}}{2}$; е) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

89. а) Модул комплексног броја $(1+i)^{13}$ је $(\sqrt{2})^{13}$, а броја $(1-i)^7$ је $(\sqrt{2})^7$, па је $|z|=(\sqrt{2})^6=8$; в) $|z|=\dfrac{|2-i||1+i|}{|3-i|}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=1$; г) $|z|=\left(\dfrac{|1-i|}{|1+i|}\right)^3=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3=1$.

90. а) 1, $-i$, 2, $-2i$; б) 0

91. $z_1=1-i$, $z_2=i$.

92. $f(5)=0$. $f(i)=0$, $f(1+i)=4i$, $f\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{6}{5}i\right)=-\dfrac{6}{5}i$.

94. а) Дата једначина еквивалентна је једначини $3x+y+i(x+y)=7+i$, а ова систему $3x+y=7$, $x+y=1$, што даје $x=3$, $y=-2$. Решење је $z=3-2i$; б) $z=1+2i$; в) $z=12-26i$; г) $z=1-2i$; д) $z=\dfrac{3}{2}-2i$; ђ) $z=-1-i$.

96. $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{10}}{2}$.

97. $(4,3)$, $(5,3)$, $(4,4)$, $(5,4)$. **98.** $(-2,-2)$, $(2,-2)$.

99. а) Из $\mathrm{Re}(z\cdot\overline{z_1})=-1$ добијамо $3x+2y=-1$, а из $\mathrm{Im}(z/z_2)=3/5$ је $-x+2y=3$. Решавањем система $3x+2y=-1$ и $-x+2y=3$ имамо: $x=-1$, $y=1$, па је $z=-1+i$. б) $z=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}i$.

100. а) $z=x\pm xi$, $x\in\mathbf{R}$; б) $z=x$ или $z=xi$, $x\in\mathbf{R}$; в) $-1,0$; г) $0,-i,i$; д) $0,-i,i$; ђ) $z=x+\left(2x+\frac{3}{2}\right)i$; е) $z=x-xi$, $x\in\mathbf{R}$; ж) $z=-\frac{1}{2}+yi$, $y\in\mathbf{R}$; з) $z=-1+yi$, $y\in\mathbf{R}$.

101. а) Ако је $z=a+bi$, тада је $-z=-a-bi$ и $\overline{z}=a-bi$, па је $\overline{(-z)}=-a+bi=-(a-bi)=-\overline{z}$. б) Нека је $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$. Тада је $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$, односно $\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. в) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1+(-z_2)}=\overline{z_1}+\overline{(-z_2)}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$; г) $\overline{z_1\cdot z_2}=(ac+bdi^2)+i(ad+bc)$, $\overline{z_1\cdot z_2}=(ac+bdi^2)-i(ad+bc)=(a-bi)(c-di)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; д) $z^{-1}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, $\overline{z^{-1}}=\dfrac{a+bi}{a^2+b^2}$, $(\overline{z})^{-1}=\dfrac{1}{a-bi}=\dfrac{a+bi}{a^2+b^2}$; ђ) $\overline{z_1:z_2}=\overline{z_1\cdot z_2^{-1}}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2^{-1}}=\overline{z_1}\cdot(\overline{z_2})^{-1}=\overline{z_1}:\overline{z_2}$.

103. а) Ако је $z=a+bi$, тада је $\overline{z}=a-bi$, $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$ ($|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ – модул комплексног броја).
б) $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{|z_1z_2|^2}=\sqrt{|z_1|^2|z_2|^2}=\sqrt{(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})}=\sqrt{(z_1z_2)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2})}=\sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})}=\sqrt{|z_1|^2|z_2|^2}=\sqrt{|z_1|^2}\cdot\sqrt{|z_2|^2}=|z_1|\cdot|z_2|$.

104. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

105. а) Нека је $z=x+iy$. Из $|x+iy+i|=|x+iy+2|$ следи $x^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2$, односно $2y+1=4x+4$ (1). На сличан начин, друга једначина даје $-4x=4y$ (2). Из (1) и (2) налазимо $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$, па је $z=-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{1}{2}$. б) $z=2-i$; в) $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$.

106. $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$, $z_3=1+2i$, $z_4=-1-2i$.

107. $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Упутство*: најпре доказати да важи $|z|=1$.

108. Из $x-iy=x^2+2xy-y^2$ имамо $x=x^2-y^2$ и $-y=2xy$. Из друге једначине је $y=0$ и тада $x=x^2$, па је $x=0$ или $x=1$, или је $x=-1/2$, одакле се добија $y^2=3/4$ и $y=\pm\sqrt{3}/2$. Дакле, постоје четири оваква броја: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

109. Нека је $z=x+iy$. Тада је $z^2=x^2-y^2+2ixy$, односно $x^2-y^2=-15$ и $2xy=8$. Како је $y=-\dfrac{4}{x}$, то је $x^2-\dfrac{16}{x^2}=15$, одакле је $x^2=-16$ или $x^2=1$. Како је $x\in\mathbf{R}$, то је $x=\pm1$, $y=\pm4$. Дакле, $a=1$, $b=4$, $c=-1$, $d=-4$, па је $abcd=16$.

110. $(x-2-i)^2=x^2-4x+3-2i(x-2)$. Израз ће бити чисто имагинаран када је $x^2-4x+3=0$, тј. $(x-1)(x-3)=0$, односно $x=1$ или $x=3$. Према томе, за $x=1$ или $x=3$ добијамо да је $(x-2-i)^2=\pm2i$.

111. $(1+i)^{4k}=((1+i)^2)^{2k}=(2i)^{2k}=(-4)^k$, $(1-i)^{4k+2}=((1-i)^2)^{2k+1}=(-2i)^{2k+1}=(-4)^k(-2i)$.

112. Ако је $z=x+yi$, тада је $\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2}+\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$. Како је $x^2+y^2-1=0$ (због $|z|=1$), тада је $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$.

114. а) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(x+y)$; б) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y-1)$;
в) $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot\left[2+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]$.

115. Дати израз P се може трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned}P&=(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{a^2b^2}+(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4})\sqrt[3]{c^2}+(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{c^4}\\&=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})\left[(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{c^4}\right]\\&=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})\left[(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{c^2})\sqrt[3]{c^2}-(\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{c^2}\sqrt[3]{b^2})\right]\\&=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{b^2})\\&=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{b}).\end{aligned}$$

116. После трансформација добија се $A=|a|/a$, па је $A=1$ за $a>0$ и $A=-1$ за $a<0$.

117. $\dfrac{b-a}{2b}$, ако је $a\ge b$; $\dfrac{a-b}{2a}$ ако је $a<b$. *Упутство.* Доказати да је $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|$.

118. Дати израз једнак је следећем:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{xy}[1-xy(x^3+y^6)]}{1+\sqrt{xy}(x^3+y^6)}&=\frac{\sqrt{xy}\left[1+\sqrt{xy(x^3+y^6)}\right]\left[1-\sqrt{xy(x^3+y^6)}\right]}{1+\sqrt{xy(x^3+y^6)}}\\&=\sqrt{xy}\left[1-\sqrt{xy(x^3+y^6)}\right]=\sqrt{xy}-xy\sqrt{x^3+y^6}.\end{aligned}$$

119. а) $\dfrac{1}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}+1)}{(5-4)(2-1)}=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}+1)$;

б) $2(\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25})$; в) $\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^3}}{2}=\dfrac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$;

г) Означити $\sqrt[n]{a}=x$ и $\sqrt[n]{b}=y$ и искористити релацију $a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}})$; резултат је $\dfrac{1}{a-b}(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}})$;

д) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{9}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\cdot(\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9})}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{9}}$, итд.; резултат је $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3})$; ђ) $\dfrac{(5+\sqrt{3})^5}{22^5}$;

е) Означити $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{k}$, $k=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$;

ж) Имениоцу додати и одузети $\sqrt[3]{a^2b^2}$; резултат: $\dfrac{a-\sqrt[3]{a^2b}}{a+b}$.

120. а) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{6}$; б) $(1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})$.

в) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}+2+\sqrt{8}+2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{4}(1+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

г) Применити идентитет $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Резултат: $\left[(a+b+c)^3-27abc\right]^{-1}\cdot(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca})\cdot\left[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right]$. **121.** 0.

122. Лева и десна страна у овој једнакости су ненегативне, па је довољно доказати да су њихови квадрати једнаки.

123. *Упутство.* Ако је $a\in\mathbf{Z}$, тада и $a^2\in\mathbf{Z}$. Резултат је $a=-10$.

124. У сваком сабирку рационалишемо именилац:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3+\sqrt{3}}&=\frac{3-\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3},\\\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}&=\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{30}=\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{10}\sqrt{5},\\\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}&=\frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{70}=\frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{1}{14}\sqrt{7},\\&\cdots\\\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}&=\frac{\sqrt{2n-1}}{2(2n-1)}-\frac{\sqrt{2n+1}}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

Сабирањем добијамо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}\\&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2n+1}}{2(2n+1)}<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

125. Производ датих бројева је

$$ab=\sqrt{8^2-\left(2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=2(\sqrt{5}-1).$$

Због $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4(3+\sqrt{5})$ је $a+b=2\sqrt{3+\sqrt{5}}=2\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$.

127. а) $\dfrac{1}{a(a^{1/m}-a^{1/n})}$; б) $\dfrac{\sqrt[m]{a}+3\sqrt[n]{a}}{a}$; в) $|a^{1/m}-a^{1/n}|$.

128. а) 1; б) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$.

129. Приметимо да је $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}+1\right)}=\sqrt{\dfrac{a^2(m+n)^2}{2mn}}=\dfrac{a(m+n)}{\sqrt{2mn}}$ и

$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2(m-n)^2}{2mn}}=\dfrac{a|m-n|}{\sqrt{2mn}}=\dfrac{a(n-m)}{\sqrt{2mn}}$. Дакле,

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right)^{-2}=\left[\frac{\dfrac{a(m+n)}{\sqrt{2mn}}+\dfrac{a(n-m)}{\sqrt{2mn}}}{\dfrac{a(m+n)}{\sqrt{2mn}}-\dfrac{a(n-m)}{\sqrt{2mn}}}\right]^{-2}$$

$$=\left(\frac{m+n+n-m}{m+n-(n-m)}\right)^{-2}=\left(\frac{n}{m}\right)^{-2}=\left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Значи, $\alpha=2$.

130. $A_m^2-B_m^2=\left(\dfrac{a^m+a^{-m}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a^m-a^{-m}}{2}\right)^2=\dfrac{a^{2m}+2a^ma^{-m}+a^{-2m}}{4}-\dfrac{a^{2m}-2a^ma^{-m}+a^{-2m}}{4}=\dfrac{4}{4}=1$; $A_mB_n+A_nB_m=\dfrac{a^m+a^{-m}}{2}\cdot\dfrac{a^n-a^{-n}}{2}+\dfrac{a^n+a^{-n}}{2}\cdot\dfrac{a^m-a^{-m}}{2}=\dfrac{1}{4}(a^{m+n}+a^{n-m}-a^{m-n}-a^{-m-n}+a^{n+m}+a^{-n+m}-a^{n-m}-a^{-n-m})=\dfrac{a^{m+n}-a^{-m-n}}{2}=B_{m+n}$. Слично се налази $A_mA_n+B_mB_n=A_{m+n}$.

131. а) $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$, $A=\dfrac{2x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=n(n-1)$; б) $A=2(n^2-1)(2n^2-1)$; в) $A=2n^2(2n^2-1)$.

134. а) $a=\dfrac{bc+bd+cd}{2\sqrt{bcd}}$, где је bcd потпун квадрат; б) $\sqrt{5}+\sqrt{2}+1$.

135. Уводимо смену $\sqrt{x-1}=t\geq 0$ $(x=t^2+1)$.

$$y=t+\sqrt{t^2+25-10t}=t+\sqrt{(t-5)^2}=t+|t-5|=\begin{cases}2t-5, & t\geq 5\\ 5, & 0\leq t\leq 5.\end{cases}$$

Дакле, функција је константна за $0\leq t\leq 5$, односно $1\leq x\leq 26$.

136. Нека је $z=a+bi$, $a,b\in\mathbf{R}$, такав комплексан број да је $z^2+1=0$. Тада је $(a+bi)^2+1=0$, односно $a^2-b^2+1+2abi=0$, па је $a^2-b^2+1=0$ и $2ab=0$. Из друге једнакости, због $b\neq 0$, следи $a=0$, а прва једнакост тада даје $b=\pm i$.

137. а) Нека је $(a+bi)^2=i$. Добијамо $a^2-b^2+2iab=i$, одакле је, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева, $a^2-b^2=0$ и $2ab=1$. Одавде налазимо $a=b$ и $ab=\dfrac{1}{2}$, односно $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $z_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mp i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $z_{1,2}=\pm 3\pm 2i$; г) $z_{1,2}=\pm(4-i)$; д) $z_{1,2}=\pm(6-5i)$; ђ) $z_{1,2}=\pm(1+\sqrt{xy}i)$; е) $z_{1,2}=\pm\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}i\right)$.

138. а) 1° Нека је $z_1=1$ и $|z_2|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{a^2}=|a|$. Сада је $|1+z_2|=\sqrt{|1+z_2|^2}=\sqrt{(1+z_2)(1+\overline{z_2})}=\sqrt{1+(z_2+\overline{z_2})+z_2\overline{z_2}}=\sqrt{1+2a+|z_2|^2}\leq\sqrt{1+2|z_2|+|z_2|^2}=\sqrt{(1+|z_2|)^2}=1+|z_2|$.

2° $|z_1+z_2|=\left|z_1\left(1+\dfrac{z_2}{z_1}\right)\right|=|z_1|\cdot\left|1+\dfrac{z_2}{z_1}\right|\leq|z_1|\left(1+\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|\right)=|z_1|+|z_1|\cdot\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=|z_1|+\left|z_1\cdot\dfrac{z_2}{z_1}\right|=|z_1|+|z_2|$.

б) Применом неједнакости под а), односно из $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ добијамо $|z_1|=|z_2+(z_1-z_2)|\leq|z_2|+|z_1-z_2|$, одакле је $|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|$. Једнакост важи ако је $\mathrm{Re}(z_1):\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2):\mathrm{Im}(z_2)$.

140. Због $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$ добијамо: $(1+i)^{200}=2^{100}$, $(1-i)^{198}=2^{99}i$, $(1+i)^{196}=-2^{98}$, $(1-i)^{194}=-2^{97}i$, па је $z=\dfrac{11+i}{-11+i}$, тј. $|z|=1$.

142. $f(n+4)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4}=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}\cdot\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4}=-\left[\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}\right]=-f(n)$, јер је $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4}=-1$, $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4}=-1$.

143. Бројеви 2002 и 2006 су облика $4k+2$, $k\in\mathbf{N}$. Како је

$$f(4k+2)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4k+2}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4k+2}=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{2k+1}+\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{2k+1}$$

$$=i^{2k+1}+(-i)^{2k+1}=i^{2k+1}-i^{2k+1}=0,$$

то је и тражени збир такође једнак нули.

144. $z=\left(\dfrac{i-1}{i+1}\right)^n=\left(\dfrac{(i-1)^2}{-2}\right)^n=i^n$. 1° За $n=4k$, $\mathrm{Re}(z)=1$, $\mathrm{Im}(z)=0$. 2° За $n=4k+1$, $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=1$. 3° За $n=4k+2$, $\mathrm{Re}(z)=-1$, $\mathrm{Im}(z)=0$. 4° За $n=4k+3$, $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=-1$.

145. Из $(|a|-|b|)^2\geq 0$ следи $2|ab|\leq a^2+b^2$, па је $a^2+b^2+2|ab|\leq 2(a^2+b^2)$, односно $\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)\leq a^2+b^2$. Одавде непосредно следи прва неједнакост. Друга неједнакост следи из $a^2+b^2\leq(|a|^2+|b|^2)^2$.

146. а) Из $1+z+z^2=0$ следи $z+z^2+z^3=0$, тј. $z^3=-(z^2+z)=-(-1)=1$. б) Као под а) је $x^3=1$. Одавде је $x^{1000}=(x^3)^{333}\cdot x=x$, $x^{-1000}=\dfrac{1}{x}$, па је $x^{1000}+x^{-1000}+1=x+\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{x^2+x+1}{x}=0$. в) $z^3=-1$, $z^{1000}+\dfrac{1}{z^{1000}}=-1$; г) 7; ђ) Искористити резултат под а).

147. $|ab+bc+ca|=|abc|\cdot\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|=|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|=|\overline{a+b+c}|=\overline{|a+b+c|}=|a+b+c|$.

Глава II – Квадратна једначина и квадратна функција

148. а) Дата једначина $(x+1)(x-2)=0$ еквивалентна је са $x+1=0$ или $x-2=0$, па су њена решења $x_1=-1$ и $x_2=2$; б) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$; в) дата једначина еквивалентна је са $x+2=0$ или $2x-1=x+5$, решења су $x_1=-2$, $x_2=6$; г) $x_1=1$, $x_2=-2$; д) дата једначина еквивалента је са $a-2=4$ или $a-2=-4$, па су њена решења $a_1=6$, $a_2=-2$; ђ) $b_1=\dfrac{3}{2}$, $b_2=-\dfrac{1}{2}$.

149. а) $x(x-2)=0\iff x=0\vee x-2=0$; $x_1=0$, $x_2=2$; б) $x_1=0$, $x_2=-3$; в) $x_1=0$, $x_2=\dfrac{3}{2}$; г) $x_1=0$, $x_2=-\dfrac{9}{5}$; д) $x_1=0$, $x_2=-8$; ђ) $x_1=0$, $x_2=\dfrac{7}{18}$; е) $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{2}$; ж) $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$.

150. а) Дата једначина еквивалентна је са $x^2 = \frac{121}{4}$, односно са $x = \frac{11}{2}$ или $x = -\frac{11}{2}$, па су њена решења $x_1 = \frac{11}{2}$ и $x_2 = -\frac{11}{2}$. б) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$; в) $x_1 = \sqrt{31}$, $x_2 = -\sqrt{31}$; г) $x_1 = \frac{5}{2}i$, $x_2 = -\frac{5}{2}i$; д) $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = -\frac{7}{4}$.

151. а) $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$; б) $x_1 = i$, $x_2 = -i$; в) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; г) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

152. а) $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; в) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; г) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

153. а) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{m}$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{b-a}{a+b}$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = -m-n$; г) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$.

154. а) $m = -1$; б) $m = 0$; в) $m = 2$; г) $m = 3$.

155. а) $k = 3$; б) $k = 1$; в) $k = 0$; г) $k = 2$.

156. а) На основу формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ налазимо

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2},$$

одакле је $x_1 = 2$, $x_2 = 7$.

б) $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$, одакле је $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$. *Напомена*. Како је $b = -10$ једначина се може решавати и помоћу формуле $x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$. Дакле $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3}$, одакле је $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$.

в) Како је $a = 1$, $b = -6$, једначина се може решавати и на основу формуле $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - ac}$. Налазимо $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$, одакле је $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

г) $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$; д) $x_1 = \frac{5}{12}$, $x_2 = \frac{1}{4}$; ђ) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$; е) $x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{7}{5}i$, $x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{7}{5}i$; ж) $x_1 = \sqrt{2} - i$, $x_2 = \sqrt{2} + i$.

157. а) Сређивањем добијамо једначину $2x^2 + 21x + 52 = 0$ чија су решења $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{13}{2}$; б) $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{23}{4}$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{14}$; г) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

158. а) Да би једначина била дефинисана морају сви изрази који у њој учествују бити дефинисани, дакле, мора бити $x - 1 \neq 0$ и $x + 2 \neq 0$. Обе стране једначине множимо са $(x-1)(x+2) \neq 0$ и после сређивања добијамо једначину $x^2 + 5x + 6 = 0$ чија су решења $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. С обзиром да је $x \neq -2$, то је једино решење $x = -3$.
б) $x = 0$; в) $x = \frac{5}{4}$; г) $x = \frac{1}{2}$; д) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$; ђ) $x = -\frac{2}{5}$.

159. Једначина се своди на $6x^2 - x - 1 = 0$, $x \neq -4$, $x \neq \frac{1}{2}$. Решење једначине је $x = -\frac{1}{3}$.

160. а) За $p = \pm 1$; за $p = 1$ је $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; за $p = -1$ је $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. б) За $p = -3$ решења су $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

161. а) Ако је $x - 2 \geq 0$, онда је $|x-2| = x - 2$ па тражимо вредности за x такве да је $2x^2 - 5x - 3x + 6 = 0$, односно $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x \geq 2$. Решења ове једначине су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Прво од њих не задовољава услов $x \geq 2$, па наша једначина има само решење $x_2 = 3$. Ако је $x - 2 < 0$, онда је $|x-2| = -(x-2)$ па тражимо вредности за x такве да је $x^2 - x - 3 = 0$, $x < 2$. Решења ове једначине су $x' = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x'' = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Друго решење не задовољава услов $x < 2$, па је решење ове једначине $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Дакле, једначина $2x^2 - 5x - 3|x-2| = 0$ има два решења. То су $x_2 = 3$, $x' = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.
б) $x_1 = \frac{-5+\sqrt{41}}{4}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4}$, $x' = 2$, $x'' = \frac{1}{2}$; в) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; г) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; д) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; ђ) $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$; е) $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$; ж) нема решења.

162. а) Дискриминанта $D = b^2 - 4ac = 100 - 36 = 64$ је позитивна па су решења реални и различити бројеви. б) $D = 196 > 0$ — решења су реална и различита. в) $D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ — једначина има двоструко реално решење. г) $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$ — решења су конјуговано-комплексни бројеви.

163. а) $D = 144 > 0$, $a = 1 > 0$, $c = 64 > 0$, $b = -20 < 0$. Решења су реална и различита ($D > 0$), истог знака ($c > 0$) и оба позитивна ($b < 0$), б) $D = 25$, $a = 2$, $c = -3$, $b = 1$. Решења су реална и различита ($D > 0$), супротног знака ($c < 0$) и већу апсолутну вредност има негативно решење ($b > 0$). в) $D = 0$, $a = 9$, $c = 4$, $b = -12$. Једначина има двоструко ($D = 0$) позитивно ($b < 0$) решење.

164. Да би то била квадратна једначина, мора бити $m \neq -2$. Дискриминанта једначине је $D = 4^2 + 4(m+2) = 4(m+6)$. 1° Решења једначине су реална и различита ако је $m > -6$ и $m \neq -2$. 2° Решења једначине су реална и једнака, односно једначина има двострко решење ако и само ако је $m = -6$. 3° Једначина има један пар конјуговано-комплексних решења као и само ако је $m < -6$.

165. а) $D = 9 - 4m$. За $m < \frac{9}{4}$ решења су реална и различита. За $m = \frac{9}{4}$ решења су реална и једнака. За $m > \frac{9}{4}$ решења су конјуговано-комплексна. б) $D = 25 - 24a$; в) $D = (2m+5)^2 - 4m^2 = 25 + 20m$; г) $D = -16m$; д) $D = 9 + 8k$; ђ) $D = (-6m^2)^2 - 40m^4 = -4m^4$. Решења су конјуговано-комплексна за сваку реалну вредност параметра $m \neq 0$.

166. а) $m_1 = 1$, $m_2 = 5$; б) $m_1 = -\frac{4}{7}$, $m_2 = 4$.

167. $D = -35k^2 + 72k - 4 = 0 \iff k = 2 \vee k = \frac{2}{35}$; $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{2}{35}$.

168. $a = 1 > 0$, $D = 65 - 8m$, $b = -7$, $c = 2m - 4$. 1° Решења ће бити оба позитивна ($b = -7 < 0$) за $D = 65 - 8m \geq 0$ и $c = 2m - 4 > 0$, односно за $2 < m \leq \frac{65}{8}$. 2° Решења ће бити супротног знака за $D = 65 - 8m > 0$ и $c = 2m - 4 < 0$, односно за $m < 2$. Како је $b = -7 < 0$ решење веће апсолутне вредности је позитивно.

169. $D = 2^2 - 4(m-3) = 4(4-m)$, $a = 1$, $b = -2$, $c = m - 3$. 1° За $4 - m < 0$, односно за $m > 4$ решења су конјуговано-комплексна. 2° За $4 - m = 0$, односно за $m = 4$ једначина има двоструко ($D = 0$) позитивно ($b < 0$) решење: $x_{1,2} = 1$. 3° Како је $a = 1 > 0$, за $4 - m > 0$ и $m - 3 < 0$, односно за $m < 3$ једначина има решења супротног знака и решење веће апсолутне вредности је позитивно ($b > 0$). 4° За $4 - m > 0$, односно за $m < 4$ једначина не може имати оба решења негативна јер је $b = -2 < 0$.

170. Ако у формули $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ заменимо дате вредности, добијамо а) $x^2 - 7x + 10 = 0$; б) $x^2 + 7x + 6 = 0$; в) $x^2 - 2x - 3 = 0$; г) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; д) $x^2 - x + 1{,}6 = 0$; ђ) $x^2 - 1{,}8x - 1{,}15 = 0$; е) $x^2 - 4x + 1 = 0$; ж) $x^2 - 2x + 5 = 0$; з) $x^2 - 4x + 7 = 0$; и) $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$.

171. Да, јер се лако доказује да су то конјуговано-комплексни бројеви.

172. Виетове формуле за квадратне једначине гласе:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

а) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$; б) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{3abc - b^3}{a^3}$; в) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{c}$; г) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$.

173. а) 5. Применити једнакост $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. б) 7. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$. в) 17. $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1x_2(2(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2)$.

174. Решавањем система једначина $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, $x_1 - x_2 = 3$ добија се $m = 11$.

175. На основу Виетових формула је $x_1 + x_2 = 8$, $x_1x_2 = q$. У задатку се захтева да буде $x_1 = 3x_2$. Из $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 = 3x_2$ произилази $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. Према томе је $q = 6 \cdot 2 = 12$.

176. $m_1 = -\frac{4}{15}$, $m_2 = 4$.

177. На основу Виетових формула и услова задатка је $x_1 + x_2 = 2m + 1$, $x_1x_2 = 5m - 4$, $4x_2 - x_1 = 10$; из прве и треће једнакости добијају се решења $x_1 = \frac{1}{5}(8m - 6)$, $x_2 = \frac{1}{5}(2m + 11)$. Добијене вредности уврстимо у другу једначину и добијамо: $16m^2 - 49m + 34 = 0$, одакле је $m_1 = \frac{17}{16}$, $m_2 = 2$. **178.** $p_{1,2} = \pm 7$.

179. По Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m^2 - 11}$, $x_1x_2 = \frac{1}{m^2 - 11}$. Због $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6$ је $x_1 + x_2 = 6x_1x_2$ или $\frac{2(m+1)}{m^2 - 11} = \frac{6}{m^2 - 11}$, за $m^2 \neq 11$, одакле је $m = 2$.

180. Захтев $x_1 = \frac{1}{x_2}$ истоветан је са $x_1x_2 = 1$. Како је из једначине $\frac{k+8}{3k} = x_1x_2$, то добијамо $\frac{k+8}{3k} = 1$, одакле је $k = 4$.

181. На основу Виетових формула је $x_1 + x_2 = 3m$, $x_1x_2 = m^2$. Квадрирањем обе стране прве једначине, добијамо $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 9m^2$. Заменом $x_1^2 + x_2^2 = 112$ и $x_1x_2 = m^2$ у последњу једнакост добијамо $112 + 2m^2 = 9m^2$, односно $m_{1,2} = \pm 4$.

182. На основу Виетових формула налазимо $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = m - 4$. Даље имамо да је $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2(m - 4) = 13$, одакле је $m = 10$. Према томе, једначина $x^2 - 5x + 6 = 0$ има решења чији збир квадрата износи 13.

183. $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 1$.

184. а) $c = \frac{50}{9}$; б) $c = 1$; в) $c = \frac{5}{8}$; г) $c = 5$; д) $c = 6$.

185. Решења квадратне једначине су реална и негативна ако и само ако је $D \geq 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$. Једначина има реална решења за све $m \in \mathbf{R}$, јер је:

$$D = 4((m-1)^2 + 4m) = 4(m+1)^2 \geq 0.$$

Из $2(m-1) < 0$ и $-m > 0$ следи да једначина има негативна решења за $m < 0$.

186. Решења квадратне једначине су реална и позитивна ако и само ако је $D \geq 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$. Дискриминанта једначине је $D = 4(10 - 2m)$, па решења припадају скупу реалних бројева ако и само ако је $m \leq 5$. Како је $x_1 + x_2 = 4$ и $x_1x_2 = 2(m-3) > 0$ за $m > 3$ закључујемо да су решења позитивни бројеви ако и само ако је $3 < m \leq 5$.

187. Дискриминанта је $D = 16k$ па једначина има реална решења ако и само ако је $k \geq 0$. $x_1x_2 = k^2 + 4 \geq 0$ за све $k \in \mathbf{R}$, $x_1 + x_2 = 2(k+2) > 0$ за $k \geq 0$. Закључујемо да су решења једначине позитивни бројеви.

188. а) Решења једначине $2x^2 - 7x + 3 = 0$ су $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, па је $2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$. Решења једначине $2x^2 + 3x - 2 = 0$ су $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, па је $2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2)$. Дати разломак је дефинисан за све $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq -2$. За такве вредности је

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

б) $\frac{2x-3}{3x-2}$ за $x \neq 1$ и $x \neq \frac{2}{3}$; в) $\frac{x(x+2)}{3x+2}$, за $x \neq -2$, $x \neq -\frac{2}{3}$.

189. а) $\frac{x+2}{4x+3}$, за $x \neq -\frac{3}{4}$ и $x \neq \frac{4}{3}$; б) $\frac{x}{x-2}$, за $x \neq 2$; в) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 5}$, за $x \neq 5$ и $x \neq 1$.

190. $x^2 + (21 - x)^2 = 261$; $x_1 = 15$, $x_2 = 6$. **191.** Из $\frac{1}{2}x\frac{1}{18}x = 1$ следи $x_1 = -6$, $x_2 = 6$.

192. Из $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 110$ следи $x = \pm 6$. Тражени бројеви су $5, 6, 7$ или $-7, -6, -5$.

193. Из $(2k-2)^2 + (2k)^2 + (2k+2)^2 = 200$ следи $k = \pm 4$. Тражени бројеви су $6, 8, 10$ или $-10, -8, -6$.

194. Нека су x, $x+1$ тражени бројеви и d разлика. Тада је $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = d$. а) 5,6; б) 67, 68; в) 13, 14.

195. Нека су m и n тражени бројеви. Дато је $m - n = 11$, $mn = -24$. Ставимо $-n = p$; тада је $m + p = 11$ и $mp = 24$, па су m и p решења једначине $x^2 - 11x + 24 = 0$ и износе $m = 8$, $p = 3$, тј. $m = 8$, $n = -3$.

196. а) Ако је $x_1 = \alpha$ заједничко решење тада су тачне следеће две једнакости:

$$\alpha^2 + k\alpha + 1 = 0, \qquad \alpha^2 + \alpha + k = 0.$$

После одузимања друге од прве једначине добијамо

$$\alpha(k-1) + 1 - k = 0.$$

Ако је $k = 1$ једначине су еквивалентне. За $k \neq 1$ добијамо $\alpha = 1$. Заменом $\alpha = 1$ у прву (или другу) једнакост, добијамо да је $k = -2$. Заједничко решење је $x = 1$. б) За $k = 3$ заједничко решење је $x = 2$. За $k = 5$ заједничко решење је $x = 1$. в) За $k = 2$ или $k = -2$ једначине имају једно заједничко решење.

197. За $p = 5$ заједничко решење је $x = 2$, а за $p = 19$ заједничко решење је $x = -5$.

198. Према постављеном захтеву је $(m+1)^2 = 4(m+1)$, односно $m^2 - 2m - 3 = 0$, одакле је $m_1 = -1$, $m_2 = 3$.

199. а) Како је једначина квадратна, то значи да је $m \neq 0$. На основу формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, налазимо $x_{1,2} = \dfrac{m + n \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4mn}}{2m} = \dfrac{m + n \pm \sqrt{(m-n)^2}}{2m} = \dfrac{m + n \pm (m - n)}{2m}$, одакле је $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{n}{m}$.

б) За $a \neq b$ и $a \neq -b$ је $x_1 = \dfrac{1}{b-a}$, $x_2 = -\dfrac{1}{a+b}$; в) $x_1 = b + \sqrt{a}$, $x_2 = b - \sqrt{a}$; г) $x_1 = m^2 + n^2$, $x_2 = m^2 - n^2$; д) $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$; ђ) $x_1 = \dfrac{a+i}{2}$, $x_2 = \dfrac{a-i}{2}$.

200. а) За $a \neq 0$, $x \neq -2b$, $x \neq 2b$ једначина је еквивалентна једначини $b(x^2 - 2ax + a^2 - 4b^2) = 0$, чија су решења (за $b \neq 0$): $x_{1/2} = a \pm 2b$. Дата једначина за $a = 0$ нема решења, за $b = 0$, $a \neq 0$ решења су $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, за $b \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 4b$ решења су $x_{1/2} = a \pm 2b$, док је за $b \neq 0$ и $a = 4b$ решење $x_1 = 6b$, а за $b \neq 0$, $a = -4b$, решење је $x_1 = -6b$.
б) За $m = 0$ нема решења, за $m \neq 0$ решења су $x_{1/2} = \dfrac{m}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$.
в) За $m = 0$ нема решења, за $m \neq 0$ решења су $x_1 = m$, $x_2 = -\dfrac{m}{2}$.
г) За $a = 0$ нема решења, за $a \neq 0$ решења су $x_{1/2} = \dfrac{-a}{2}(3 \pm \sqrt{3})$.
д) За $m = 0$ нема решења, за $m \neq 0$ решења су $x_1 = \dfrac{m}{2}$, $x_2 = -\dfrac{m}{6}$.

201. За $a \neq x$ једначина је еквивалентна једначини $x^2 - 2x(a+b) + b^2 + 2ab = 0$, која има корене $x_1 = b$, $x_2 = b + 2a$. Дата једначина за $b = a = 0$ нема решења, за $b = a \neq 0$ има решење $x_1 = 3a$, за $b = -a \neq 0$ има решење $x_1 = -a$, а за $b \neq \pm a$ има решења $x_1 = b$, $x_2 = b + 2a$.

202. Ако је $b \neq 0$, $a \neq 0$ и $a \neq b$ решење једначине је $x_1 = a$. У осталим случајевима нема решења.

203. За $x(b-1) \neq 0$ једначина је еквивалентна једначини $(b-1)^2x^2 - a(b-1)x + a - 1 = 0$. Заменом $(b-1)x = t$ добијамо једначину $t^2 - at + a - 1 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$ и $t_2 = a - 1$. Дата једначина за $b = 1$ нема решења, за $b \neq 1$, $a = 1$ решење је $x_1 = \dfrac{1}{b-1}$, а за $b \neq 1$, $a \neq 1$ решења су $x_1 = \dfrac{1}{b-1}$, $x_2 = \dfrac{a-1}{b-1}$.

204. За $m(mx-1) \neq 0$ једначина је еквивалентна једначини $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$, чија су решења (за $m \neq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{m+1}{m-1}$. За $m = 0$ или $m = 1$ дата једначина нема решења. За $m \neq 0$, $m \neq 1$ решења су $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{m+1}{m-1}$.

205. а) $D = p^2 + 4q^2$; б) $D = (a-b)^2 + 4c^4$.

206. Како је $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{a}\sqrt{b^2 - 4ac}$, то је:

а) $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -\dfrac{b}{a^2}\sqrt{b^2 - 4ac}$;

б) $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)^3 + 3x_1x_2(x_2 - x_1) = \dfrac{b^2 - ac}{a^3}\sqrt{b^2 - 4ac}$.

207. Израз се може трансформисати у $\dfrac{3(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1x_2}{x_1^3 + x_2^3 + 2x_1x_2(x_1 + x_2)}$. Како је $x_1 + x_2 = -4$, $x_1x_2 = -21$, $x_1^2 + x_2^2 = 58$, $x_1^3 + x_2^3 = -316$ то је израз једнак $-\dfrac{129}{74}$. **208.** $\dfrac{163}{8}$.

209. Виетове формуле за дату једначину гласе $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = a - 2$, па је

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4 = \frac{a^2 - 2}{2(a-2)}.$$

Биће $\dfrac{a^2 - 2}{2(a-2)} = 0$ ако и само ако је $a^2 = 2$, тј. $a = \pm\sqrt{2}$.

210. $m = 5$.

211. $25q + 15p - 6p^2 + 225 = 0$.

212. На основу Виетових формула и захтева задатака је $x_1 + x_1^2 = \dfrac{15}{4}$, односно $4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0$, одакле је $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_1' = -\dfrac{5}{2}$ а $x_2 = \dfrac{9}{4}$, $x_2' = \dfrac{25}{4}$. Из $x_1x_2 = k^2$, следи да су вредности параметра k: $k_{1,2} = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

213. На основу Виетових формула налазимо $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = m - 1$. Даље је $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 1(1 - 3m + 3) = 7$, одакле је $m = -1$. **214.** $m = 3$ или $m = -1$.

215. Услов $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} > 1$ еквивалентан је услову $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} > 1$, тј. $\dfrac{p-2}{3} > 1$, одакле је $p > 5$.

216. Тражена једначина гласи: $4x^2 - (2x_1 + 2x_2)2x + 2x_1 \cdot 2x_2 = 0$, односно $4x^2 - (y_1 + y_2)2x + y_1y_2 = 0$. Дакле, $4x^2 - 2px + q = 0$.

217. а) Из дате једначине је $x_1 + x_2 = S = -\dfrac{2m+1}{m}$, $x_1 \cdot x_2 = P = \dfrac{m-3}{m}$, односно $m = -\dfrac{1}{S+2}$ и $m = \dfrac{3}{1-P}$, одакле је $3S - P = -7$ или $3(x_1 + x_2) - x_1x_2 = -7$.
б) $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 5$.

218. Претпоставимо да тражена једначина има облик $x^2 + px + q = 0$ чија су решења $(-x_1)$, $(-x_2)$. Тада је $p = -(-(x_1 + x_2)) = -\dfrac{b}{a}$, $q = (-x_1)(-x_2) = \dfrac{c}{a}$, па тражена једначина има облик $x^2 - \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$, односно $ax^2 - bx + c = 0$.

219. $pqx^2 - (p^2 + q^2)x + pq = 0$.

220. Нека је $x^2 - Sx + P = 0$ тражена једначина, а m, n њена решења и нека су x_1, x_2 решења дате једначине. Имамо

$$S = m + n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}, \qquad P = m \cdot n = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}.$$

Према томе, тражена једначина је $cx^2 + bx + a = 0$.

221. а) Збирови решења и производи решења обеју једначина морају бити једнаки па имамо једначину: $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{m-1} = \frac{2n+2}{2}$. Исто важи за производ па је $x_1x_2 = \frac{m}{m-1} = 2$, одакле је $m = n = 2$. Решења једначина су $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. б) $m = 2$, $n = 3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

222. Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = p$, $x_1x_2 = 1 - p$. Даље је $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2(1 - p) = (p + 1)^2 - 3$ па је $x_1^2 + x_2^2$ најмање за $p = -1$.

223. $x_1 - x_2 = 2\sqrt{-m^2 + 6m - 5} = 2\sqrt{4 - (m - 3)^2}$. Разлика је највећа за $m = 3$.

224. а) Решавањем датог система једначина добијамо да је $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 6$, па је тражена једначина $x^2 - 5x + 6 = 0$.

б) Из датих једначина следи: $4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = -4$, $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = -\frac{5}{6}$, одакле се добија: $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1x_2 = -\frac{1}{6}$, па су x_1 и x_2 решења једначине $6x^2 - 4x - 1 = 0$.

225. Тражена једначина гласи

$$x^2 - \left(x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2}\right)x + \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = 0, \quad \text{односно}$$

$$x^2 - \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right)x + x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 0.$$

Заменом $x_1 + x_2 = 8$, $x_1x_2 = 12$, добијамо:

$$x^2 - \left(8 + \frac{2}{3}\right)x + \frac{185}{12} = 0,$$

па је тражена једначина $12x^2 - 104x + 185 = 0$.

226. $qx^2 + (p - 2q)x + q - p + 1 = 0$.

227. $4x^2 - 60x + 1 = 0$.

228. Дата једначина еквивалентна је са једначином $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 3m = 0$. $D = m^2 + 4$.

229. Ако су p или q решења дате једначине, онда је према Виетовим формулама $p + q = -p$, $pq = -q$, тј. $q + 2p = 0$, $q(p + 1) = 0$. Из друге једначине је $q = 0$ или $p = -1$. Ако је $q = 0$ из прве једначине је $p = 0$, ако је $p = -1$, из прве једначине је $q = 2$. Дакле, постоје две једначине са поменутим својством: $x^2 = 0$ и $x^2 - x + 2 = 0$.

230. Како је $D = 36(4 - m)$, $x_1 + x_2 = \frac{2(6 - m)}{m}$, $x_1x_2 = \frac{m - 3}{m}$, добија се следећа таблица из које се очитавају природа и знаци решења дате једначине.

m	D	$x_1 + x_2$	x_1x_2	Решења једначине
$m < 0$	$+$	$-$	$+$	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$0 < m < 3$	$+$	$+$	$-$	$x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ \lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
$m = 3$	$+$	$+$	0	$x_1 > 0,\ x_2 = 0$
$3 < m < 4$	$+$	$+$	$+$	$x_1 > 0,\ x_2 > 0$
$m = 4$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 > 0$
$m > 4$	$-$	$+$	$+$	Конјуговано-комплексни бројеви

231. Ако је време испоруке x дана, тада је дневна производња пре повећања $\frac{600}{x}$ комада, а после повећања производње $\frac{600}{x-3}$, па по захтеву задатка, добијамо једначину $\frac{600}{x-3} - 10 = \frac{600}{x}$, односно $x^2 - 3x - 180 = 0$, за $x(x - 3) \neq 0$. Решења једначине су $x_1 = 15$, $x_2 = -12$. Проблему одговара само позитивно решење. Према томе, време испоруке пре повећања производње било је 15 дана, а после повећања $15 - 3 = 12$ дана. Дневна производња пре повећања продуктивности била је $\frac{600}{15} = 40$ комада, а после повећања $\frac{600}{12} = 50$ комада траженог производа. Процентно повећање је: $p = \frac{100 \cdot 10}{40} = 25\%$.

232. Ако је време пуњења у часовима кроз ужу цев x, онда је кроз ширу $x - 5$. Кроз ужу цев за 1 час пуни се $\frac{1}{x}$ део резервоара, а кроз ширу за $\frac{1}{x-5}$ део резервоара. Кроз обе цеви за један час пуни се $\frac{1}{6}$ резервоара. Кад то изразимо једначином, добијамо:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}, \qquad x \neq 0,\ \ x \neq 5.$$

Множењем обе стране једначине са $6x(x - 5) \neq 0$ добија се једначина $x^2 - 17x + 30 = 0$, чија су решења $x_1 = 15$, $x_2 = 2$. Важи само прво решење $x_1 = 15$. Према томе, кроз ужу цев резервоар се пуни за 15 сати а кроз ширу за 10 сати. Ако би узели друго решење $x_2 = 2$, онда би време пуњења само кроз ужу цеви било мање од времена пуњења (6 сати) кроз обе цеви што је немогуће.

233. За решавање задатка користићемо формулу $s = vt$. За непознату се могу узети брзина једног, или време кретања једног од возова. Ако је време кретања првог воза x часова, онда је његова брзина $\frac{150}{x}$. Време кретања другог воза биће $x + 7$, а његова брзина $\frac{300}{x+7}$. По захтеву задатка добијамо једначину

$$\frac{150}{x} - 5 = \frac{300}{x+7}, \qquad x \neq 0,\ \ x \neq -7.$$

После скраћивања са 5 и множења са $x(x+7) \neq 0$ добијамо једначину $x^2 + 37x - 210 = 0$, чија су решења $x_1 = 5$, $x_2 = -42$. Важи само прво решење. Према томе: први воз пређе за 5 часова 150 km и има брзину $\frac{150\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{h}} = 30\,\mathrm{km/h}$. Други воз пређе за 12 часова 300 km и има брзину $\frac{300\,\mathrm{km}}{12\,\mathrm{h}} = 25\,\mathrm{km/h}$.

234. $\frac{480}{x} - \frac{480}{x+20} = 2 \iff (x = -80 \vee x = 60)$; $x_1 = 60\,\mathrm{km/h}$.

235. Брзина брзог воза добија се из једначине $\frac{588}{x} = \frac{588}{x-21} - \frac{7}{3}$. Имамо $x_1 = 84$, $x_2 = -62$. Тражена решења су 84 и 63 km/h.

236. $\frac{1000}{x} = \frac{1000}{x-5} - 10$. Брзина кретања тачке је 25 m/s.

237. Постоји. То је троугао са страницама 3, 4, 5.

238. Претпоставимо да катете имају дужине a и b. Тада је $a + b = k$ и $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = k^2 - 2ab$, одакле је $ab = \frac{1}{2}(k^2 - c^2)$, што значи да су бројеви a и b решења квадратне једначине

$$x^2 - kx + \frac{k^2 - c^2}{2} = 0.$$

Задатак има решења ако и само ако је $c < k \leq c\sqrt{2}$. За $c < k < c\sqrt{2}$ једначина има два реална и позитивна решења

$$x_1 = \frac{1}{2}(k - \sqrt{2c^2 - k^2}), \qquad x_2 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{2c^2 - k^2}),$$

па је $a = x_1$, $b = x_2$ (или обрнуто). За $k = c\sqrt{2}$ једначина има двоструко реално решење $x_1 = x_2 = \frac{k}{2}$, што значи да је тражени правоугли троугао једнакокраки.

239. а) Заменом $x^2 = t$ добијамо квадратну једначину $t^2 - 13t + 36 = 0$ чија су решења $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Из $x^2 = 4$ добијамо $x_{1,2} = \pm 2$ а из $x^2 = 9$, $x_{3,4} = \pm 3$ и то су сва решења дате једначине. б) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$; в) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$; г) $x_{1,2} = \pm\frac{a}{b}$, $x_{3,4} = \pm\frac{b}{a}$; д) $x_{1,2} = \pm 5$, $x_{3,4} = \pm a$; ђ) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm a$.

240. а) Заменом $x^3 = z$ добијамо квадратну једначину $z^2 + 3z + 2 = 0$ чија су решења $z_1 = -1$, $z_2 = -2$. Дакле, наша једначина еквивалентна је дисјункцији

$$x^3 + 1 = 0 \quad \vee \quad x^3 + 2 = 0,$$

односно

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \quad \vee \quad (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0.$$

Одатле добијамо два реална решења $x_1 = -1$ и $x_2 = -\sqrt[3]{2}$, а такође и четири различита решења која нису реална. б) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; г) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

241. а) Ако уведемо смену $x^2 - 16x = z$, добијамо квадратну једначину $z^2 - 2z - 63 = 0$, чија су решења $z_1 = 9$, $z_2 = -7$, па је

$$x^2 - 16x - 9 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 16x + 7 = 0.$$

Решења једначине $x^2 - 16x - 9 = 0$ су $x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{73}$, а једначине $x^2 - 16x + 7 = 0$ су $x_{3,4} = 8 \pm \sqrt{57}$.

б) Дату једначину можемо написати као $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1 + 1) - 12 = 0$. Увођењем смене $x^2 + x + 1 = z$ добијамо квадратну једначину $z^2 + z - 12 = 0$. Решења су $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$.

в) $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4 \iff \frac{x^2 + 2x + 3 + 4}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 3 + 1$. Заменом $x^2 + 2x + 3 = t$ добија се квадратна једначина $t^2 - 4 = 0$. Решења су $x_{1,2} = -1$, $x_{3,4} = -1 \pm 2i$.

г) Ако помножимо први и четврти, а такође други и трећи чинилац на левој страни, добијамо

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = \frac{9}{16},$$

што можемо писати у облику

$$((x^2 + 3x + 2) - 2)(x^2 + 3x + 2) = \frac{9}{16}.$$

Заменом $x^2 + 3x + 2 = t$, добијамо квадратну једначину $16t^2 - 32t - 9 = 0$. Решења су: $x_{1,2} = \frac{-3}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$.

д) $(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680$. Заменом $x^2 - 11x + 30 = t$ добијамо квадратну једначину $t^2 - 2t - 1680 = 0$. Реална решења су: $x_1 = -1$, $x_2 = 12$.

ђ) Смена $x^2 - 5x + 6 = t$. Решења су: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}$

242. а) $x = 0$ није решење једначине. За $x \neq 0$ дата једначина је еквивалентна са једначином коју добијамо када је поделимо са x^2. Груписањем одговарајућих чланова, добијамо

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Означимо ли $x + \frac{1}{x} = z$, биће $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = z^2 - 2$, па добијамо квадратну једначину $z^2 - 2z - 3 = 0$, чија су решења $z_1 = 3$, $z_2 = -1$. Из $x + \frac{1}{x} = 3$ налазимо $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, а из $x + \frac{1}{x} = -1$, $x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

б) Деобом са x^2 $(x \neq 0)$ и груписањем чланова, добијамо

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Смена $x + \frac{1}{x} = z$. Решења су: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.

в) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-19 \pm \sqrt{217}}{12}$;

г) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

243. а) Ово је симетрична једначина непарног степена па знамо да је $x_1 = -1$ једно њено решење. Количник полинома $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$ и $x + 1$ је $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$, па једначину можемо писати у облику

$$(x+1)(2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2) = 0.$$

Посматрајмо једначину

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Она је, такође, симетрична. После деобе са x^2 (нула није решење једначине) и груписањем чланова са једнаким коефицијентима, добијамо

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Сменом $x+\frac{1}{x}=z$, после квадрирања добијамо $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$, па имамо квадратну једначину $2z^2+3z-20=0$, чија су решења $z_1=\frac{5}{2}$, $z_2=-4$. Из $x+\frac{1}{x}=-4$ налазимо $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$, а из $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, $x_4=2$, $x_5=\frac{1}{2}$.

б) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{4}$; в) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $x_{4/5}=1$;

г) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_{4/5}=\frac{1}{4}(-3\pm i\sqrt{7})$;

д) $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{1}{2}$, $x_4=-5$, $x_5=-\frac{1}{5}$.

244. а) Једно решење је $x_1=1$ па једначину можемо писати у облику

$$(x-1)(2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0.$$

Једначина је симетрична и решава се заменом $z=x+1/x$. Њена решења су у исто време и решења дате једначине: $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_{4/5}=-2\pm\sqrt{3}$.

б) $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=\frac{1}{4}$, $x_4=-3$, $x_5=-\frac{1}{3}$;

в) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=7$, $x_4=\frac{1}{7}$;

г) $x_{1,2}=\mp 1$, $x_3=3$, $x_4=\frac{1}{3}$, $x_5=5$ $x_6=\frac{1}{5}$;

д) $x_{1,2}=\mp 1$, $x_3=3$, $x_4=\frac{1}{3}$, $x_{5,6}=\pm i$.

245. а) Из $(x-5)\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x+1)=0$ добија се $15x^6-128x^5+275x^4-275x^2+128x-15=0$; б) $3x^6-10x^5+3x^4-3x^2+10x-3=0$.

246. а) Ако дату једначину напишемо у облику $(x-2)((x-2)-1)((x-2)-2)=6$ сменом $x-2=t$ она се своди на $t^3-3t^2+2t-6=0$, односно $(t-3)(t^2+2)=0$. Одавде је $t_1=3$, $t_{2,3}=\pm i\sqrt{2}$, па су решења дате једначине $x_1=5$, $x_{2,3}=2\pm i\sqrt{2}$.

б) Множењем првог и другог, а такође трећег и четвртог чиниоца на левој страни, добијамо

$$(x^2-x-6)(x^2+5x-6)=40x^2.$$

Ако уведемо смену $x^2-6=t$, тада је

$$(t-x)(t+5x)=40x^2 \quad \text{или} \quad t^2+4xt-45x^2=0.$$

Решавајући последњу једначину по t, добијамо $t_1=5x$, $t_2=-9x$. Задатак се своди на две квадратне једначине: 1° $x^2-5x-6=0$, $x_1=-1$, $x_2=6$; 2° $x^2+9x-6=0$, $x_{3,4}=\frac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$.

в) Смена $x(x+1)=t$. Решења су: $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}$.

г) Додавањем и одузимањем левој страни једначине x^2, добијамо $x^4-2x^3+x^2-x^2+x-\frac{3}{4}=0$, односно $(x^2-x)^2-(x^2-x)-\frac{3}{4}=0$. Ако уведемо смену $x^2-x=t$, добија се једначина $t^2-t-\frac{3}{4}=0$, чија су решења $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{1}{2}$. Из $x^2-x=\frac{3}{2}$ је $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$, а из $x^2-x=-\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}$.

247. Када је дата једначина са параметром можемо је разматрати као једначину са две непознате. Приметимо да је дата једначина квадратна у односу на параметар a. Напишимо је у облику

$$a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0,$$

чија су решења $a_1=x^2+x+1$, $a_2=x^2-x$. Сада се дата једначина своди на две квадратне једначине:

1° $x^2+x+1-a=0$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$, $a\geq\frac{3}{4}$;

2° $x^2-x-a=0$, $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$, $a\geq-\frac{1}{4}$.

Напомена: За $a\geq\frac{3}{4}$ једначина има четири реална решења: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$. За $-\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{3}{4}$ једначина има два реална решења $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$. За $a<-\frac{1}{4}$, нема реалних решења.

248. а) Применом Виетових формула и на основу захтева задатка добијамо систем једначина: $x_1+x_2=2m^2-1$, $x_1x_2=2(m^2+2)$, $x_1-x_2=1$. Елиминацијом x_1 и x_2 из датих једначина добијамо биквадратну једначину $m^4-3m^2-4=0$ чија су решења $m_{1,2}=\pm i$, $m_{3,4}=\pm 2$. Према томе, тражене вредности реалног параметра су $m_{3,4}=\pm 2$.

б) $m=\pm\sqrt{4+\sqrt{52}}$.

249. а) $f(0)=4$; б) $f(1)=5$; в) $f(-1)=9$; г) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{4}$.

250. а) $c=2$; б) $c=-2$; в) $c=-4$.

251. Заменом координата датих тачака A, B и C у дату функцију, добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 4a+2b+c&=18,\\ 9a-3b+c&=-12,\\ 9a+3b+c&=42. \end{aligned}$$

Решавањем система добијамо: $a=3$, $b=9$, $c=-12$, па је $f(x)=3x^2+9x-12$.

252. а) Из система једначина

$$\begin{aligned} a-\ b+c&=\ 5,\\ 9a+3b+c&=45,\\ 4a+2b+c&=20, \end{aligned}$$

добијамо $a=5$, $b=0$, $c=0$, па је $f(x)=5x^2$.

б) $f(x)=3x^2+11x-9$; в) $f(x)=-\frac{1}{10}x^2+7$. **253.** $b=1$, $c=-6$.

255. а) 1° Функција је парна; 2° $y=0$ за $x_1=-1$, $x_2=1$; 3° $T(0,1)$ – максимум; 4° $y>0$ за $-1<x<1$; $y<0$ за $x<-1$ или $x>1$; 5° опада за $x>0$, расте за $x<0$.

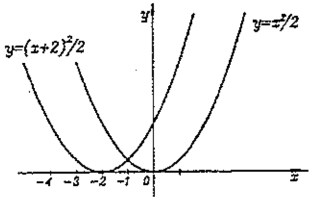
б) 1° Функција је парна; 2° $y=0$ за $x_1=-4$, $x_2=4$; 3° $T(0,-4)$ – минимум; 4° $y>0$ за $x<-4$ или $x>4$; $y<0$ за $-4<x<4$; 5° расте за $x>0$, опада за $x<0$.

в) 1° Функција је парна; 2° нема реалних нула; 3° $T(0,4)$ – минимум; 4° $y > 0$ за све $x \in \mathbf{R}$; 5° опада за $x < 0$, расте за $x > 0$.

г) 1° Функција је парна; 2° нема реалних нула; 3° $T(0,-1)$ – максимум; 4° $y < 0$ за све $x \in \mathbf{R}$; 5° расте за $x < 0$, опада за $x > 0$.

256. а) Како је $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 = \frac{1}{2}(x-(-2))^2$, овде је $a = \frac{1}{2}$, $m = -2$. Скицираћемо прво график функције $y = \frac{1}{2}x^2$ па га транслирати за -2 дуж осе Ox, што значи да га треба померати за 2 улево. Теме одговарајуће параболе је тачка $(-2,0)$, (сл. 1).

x y	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}(x+2)^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8



Сл. 1

б) $T(1,0)$ — макс; в) $T(-2,0)$ — мин; г) $T(3,0)$ — мин.

257. а) Функција има минимум, јер је $a = 2 > 0$, за $x = -\frac{b}{2a} = 2$: $y_{\min} = \frac{4ac-b^2}{4a} = -2$. Према томе, функција има минимум $f(2) = -2$. б) Минимум $f(3) = -1$. в) Максимум $f(-3) = 4$. г) Максимум $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{49}{8}$.

258. За $x = \frac{m}{2}$ функција има минимум $y_{\min} = -\frac{1}{4}m^2 + m + 1$. По захтеву задатка је $\frac{1}{4}m^2 + m + 1 = -2$ или $m^2 - 4m - 12 = 0$ одакле је $m_1 = 6$, $m_2 = -2$. Задатак има два решења. Постоје две функције $y = x^2 - 6x + 7$ и $y = x^2 + 2x + 1$ које имају минимум једнак -2, прва за $x = m_1/2 = 3$, а друга за $x = m_2/2 = -1$.

259. Функција има максимум када је $m + 2 < 0$, односно $m < -2$. По захтеву задатка је $\frac{m-1}{2(m+2)} = 2$, одакле је $m = -3$.

260. а) $k = 1$; б) $k = 1$. **261.** Не. Функција има минимум у тачки -2.

262. $f(x) = x - x^2$. Највећу вредност има за $x = \frac{1}{2}$.

263. $\frac{k^2 - 4(k-1)}{4} = \frac{4-4k}{4}$, одакле је $k = 0$. $f_1(x) = x^2 - 1$; $f_2(x) = x^2 - 2x$.

264. $f(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2$, функција има минимум за $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

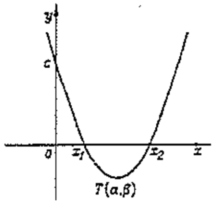
265. Канонски облик функције је

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a},$$

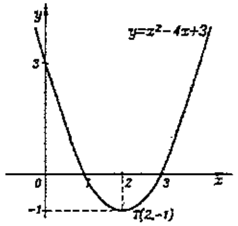
или

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta, \qquad \text{где је } \alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

а) Овде је $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$, $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -1$. Према томе, дата функција има облик $y = 2(x-2)^2 - 1$ (сл. 2). б) $y = 2(x-2)^2$; в) $y = -(x+1)^2$; г) $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$; д) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}$; ђ) $y = -2(x-1)^2 + 8$; е) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{25}{2}$.



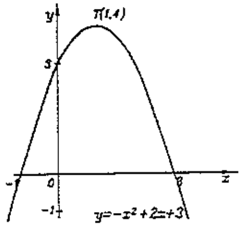
Сл. 2



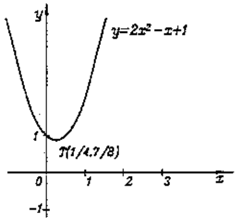
Сл. 3

266. а) Коефицијент $a = 1$ је позитиван, па је парабола окренута отвором на горе. $D = b^2 - 4ac = 4 > 0$, па функција има две нуле; то су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Координате темена су: $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$, $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a} = -1$. Функција је позитивна ако је $x < 1$ или $x > 3$, негативна је ако је $1 < x < 3$. Функција опада за $x < 2$, расте за $x > 2$. Реалан број 2 је тачка минимума; минимум је -1. График сече Oy-осу за $y = 3$. График је скициран на сл. 3.

б) 1° $y = 0$ за $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, 2° $T(1,4)$, $a = -1 < 0$ — максимум, 3° $y = 4$ за $x = 0$, 4° $y > 0$ за $1 < x < 3$, $y < 0$ за $x < 1$ или $x > 3$, 5° расте за $x < 1$, опада за $x > 1$, 6° график је парабола (сл. 4).



Сл. 4

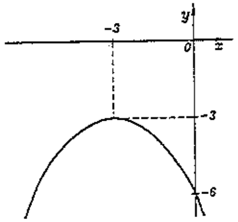


Сл. 5

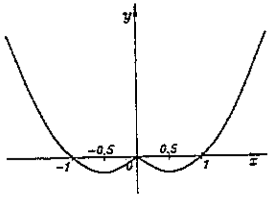
в) 1° Нема нула, 2° $T\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$, $a = 2 > 0$ — минимум, 3° $y = 1$ за $x = 0$, 4° $y > 0$ за све $x \in \mathbf{R}$, 5° опада за $x < \frac{1}{4}$, расте за $x > \frac{1}{4}$, 6° график на сл. 5.

г) 1° Нема нула, 2° $T(-3,-3)$, $a = -\frac{1}{3} < 0$ — максимум, 3° $y = -6$ за $x = 0$, 4° $y < 0$ за све $x \in \mathbf{R}$, 5° расте за $x < -3$, опада за $x > -3$, 6° график на сл. 6.

268. а) $x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0, \\ x^2 + x, & x < 0 \quad \text{(сл. 7)}. \end{cases}$

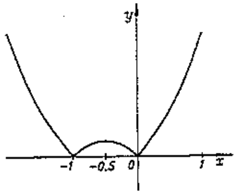


Сл. 6

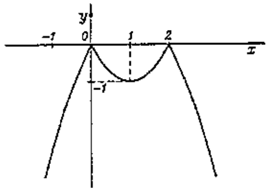


Сл. 7

б) $|x^2+x| = \begin{cases} x^2+x, & \text{за } x \geq 0 \text{ или } x \leq -1, \\ -x^2-x, & \text{за } -1 < x < 0 \text{ (сл. 8)}. \end{cases}$



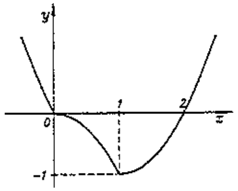
Сл. 8



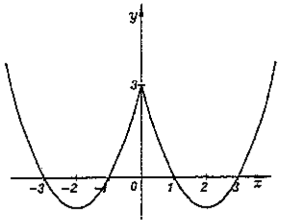
Сл. 9

в) $-|x^2-2x| = \begin{cases} -x^2+2x, & \text{за } x \geq 2 \text{ или } x \leq 0, \\ x^2-2x, & \text{за } 0 < x < 2 \text{ (сл. 9)}. \end{cases}$

г) $|-x^2+x| - x = \begin{cases} -x^2, & \text{за } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2-2x, & \text{за } x < 0 \text{ или } x > 1 \text{ (сл. 10)}. \end{cases}$



Сл. 10



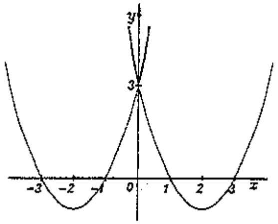
Сл. 11

269. а) $x^2-4|x|+3 = \begin{cases} x^2-4x+3, & \text{за } x \geq 0, \\ x^2+4x+3, & \text{за } x < 0 \text{ (сл. 11)}. \end{cases}$

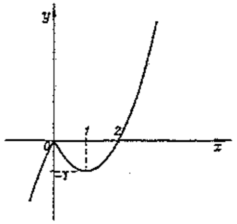
б) $x^2+4|x|+3 = \begin{cases} x^2+4x+3, & \text{за } x \geq 0, \\ x^2-4x+3, & \text{за } x < 0 \text{ (сл. 12)}. \end{cases}$

в) $|x|(x-2) = \begin{cases} x^2-2x, & \text{за } x \geq 0, \\ -x^2+2x, & \text{за } x < 0 \text{ (сл. 13)}. \end{cases}$

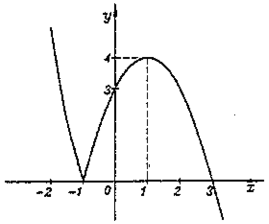
г) $(3-x)|x+1| = \begin{cases} -x^2+2x+3, & \text{за } x \geq -1, \\ x^2-2x-3, & \text{за } x < -1 \text{ (сл. 14)}. \end{cases}$



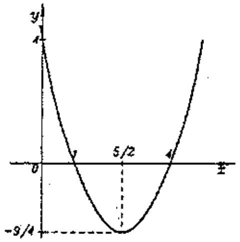
Сл. 12



Сл. 13



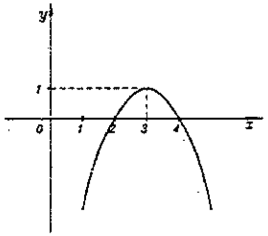
Сл. 14



Сл. 15

270. Заменом координата тачака M и N у датој функцији добијају се једначине $-2 = 4+2p+q$, $-2 = 9+3p+q$, одакле је $p=-5$, $q=4$. Тражена функција има следећа својства: 1° $y=0$ за $x_1=1$ и $x_2=4$, 2° $T\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, $a=1>0$ — минимум, 3° $y=4$ за $x=0$, 4° $y>0$ за $x<1$ или $x>4$, $y<0$ за $1<x<4$, 5° опада за $x<\frac{5}{2}$, расте за $x>\frac{5}{2}$, 6° график је скициран на слици 15.

271. Дата функција има максимум ($a=-1<0$) за $x=-\frac{b}{2a}$, односно за $\frac{m+3}{2}=3$, одакле је $m=3$. Тражена функција је $y=-x^2+6x-8$. 1° $y=0$ за $x_1=2$ и $x_2=4$, 2° $T(3,1)$ — максимум, 3° $y=-8$ за $x=0$, 4° $y>0$ за $2<x<4$, $y<0$ за $x<2$ или $x>4$, 5° расте за $x<3$, опада за $x>3$, 6° график на сл. 16.



Сл. 16

272. а) $q=0$; б) $q=-2$; в) $p=-8$, $q=16$; г) $p=\frac{13}{2}$, $q=-\frac{7}{2}$.

273. $p>3$.

274. а) Збир квадрата решења x_1 и x_2 дате једначине је функција параметра

$$\varphi(m) = x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Применом Виетових формула из дате једначине, добијамо:

$$x_1+x_2=m, \qquad x_1 \cdot x_2 = m-1.$$

Из претходног следи да је $\varphi(m) = m^2 - 2m + 2$. Функција $\varphi(m)$ има минимум у темену параболе $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, односно за $m = 1$. б) $m = -\frac{1}{2}$.

275. Дискриминанта функције треба да буде једнака нули. Из $D = m^2(m+1)^2 - 400 = (m^2 + m - 20)(m^2 + m + 20) = 0$, добијамо $m_1 = -5$, $m_2 = 4$.

276. $D = (6m + 4)^2 - 4(m + 1)(8m + 3) = 4\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 > 0$.

277. Функција је парна ако и само ако за све $x \in \mathbf{R}$ важи $f(-x) = f(x)$. Дакле, за све $x \in \mathbf{R}$ је $ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c$, односно за све $x \in \mathbf{R}$ је $2bx = 0$, што је тачно ако и само ако је $b = 0$. Функција не може бити непарна.

278. а) Дате функције имају минимуме у теменима $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, односно $T(m + 1, m^2 + 2m - 1)$, $m \in \mathbf{R}$. Узимајући да је $X = m + 1$, $Y = m^2 + 2m - 1$, елиминацијом m, $m = X - 1$, налазимо $Y = X^2 - 2$, а то је парабола.

б) $Y = -(X - 1)^2$; в) $Y = X^2 - 1$.

279. а) 1° Треба да буде $m - 1 < 0$ и $D = 4[(m+1)^2 - m(m - 1)] < 0$. Одавде се добија $m < -\frac{1}{3}$.

2° Имамо да су координате темена параболе ($m \neq 1$): $x_T = \frac{m + 1}{m - 1}$ и $y_T = \frac{-3m - 1}{m - 1}$. Добија се $m = \frac{x_T + 1}{x_T - 1}$, па је $y_T = -2x_T - 1$, $x \neq 1$. Дакле, геометријско место темена је права $y = -2x - 1$ без тачке $(1, -3)$.

3° Напишимо једначину датог скупа функција у облику $y + x^2 + 2x + m(-x^2 + 2x - 1) = 0$. Треба да буде $y + x^2 + 2x = 0$ и $-x^2 + 2x - 1 = 0$, одакле се налази $x = 1$, $y = -3$. Значи, свим графицима датог скупа кривих припада тачка $M(1, -3)$.

б) 1° $m < -3$; 2° $y = 2x - 4$, $x \neq 1$; 3° $M(1, -2)$.

280. $f(x) < 0$ за све $x \in \mathbf{R}$ ако је $m < -\frac{1}{3}$; $f(-1) = -7$ за $m = -2$; $f(x) = -3x^2 + 2x - 2$ има максимум у $T\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

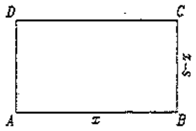
281. Ако је један од тих сабирака x, други је $k - x$. Тражи се максимум функције $y = x(k - x) = -x^2 + kx$. Тај максимум је у тачки $x = -\frac{b}{2a} = \frac{k}{2}$. Дакле производ је највећи када су сабирци једнаки.

282. Пређени пут код вертикалног хица је $s = ct - \frac{gt^2}{2}$. То је квадратна функција променљиве t. Тело достигне највећу висину $s_{\max} = \frac{c^2}{2g}$ за $t = \frac{c}{g}$, што одговара времену за које тренутна брзина $v = c - gt$ постаје једнака нули.

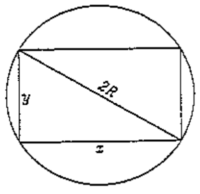
283. Теме уписаног квадрата дели страницу датог квадрата на делове x, $a - x$. Површина $x^2 + (a - x)^2$ уписаног квадрата најмања је за $x = a/2$.

284. Дужина $2s$ је обим правоугаоника, а s полуобим, односно збир две суседне странице. Зато, ако ставимо $AB = x$, онда је $BC = s - x$. Ако површину означимо са y, онда је

$y = x(s - x)$, односно $y = -x^2 + sx$ за $x = \frac{s}{2}$, функција има максимум $y_{\max} = \frac{1}{4}s^2$ ($a = -1 < 0$). Према томе, од свих правоугаоника највећу површину ограничава онај чије су суседне странице једнаке, то је квадрат (сл. 17).



Сл. 17



Сл. 18

285. Означимо са x и y странице траженог правоугаоника (сл. 18), а са S његову површину. По Питагориној теореми је $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, па је $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, односно $S^2 = x^2(4R^2 - x^2)$. Заменимо $x^2 = t$. Тражи се максимум квадратног тринома $t(4R^2 - t)$. Он се налази у тачки $t = 2R^2$ или $x^2 = 2R^2$, одакле је $x = R\sqrt{2}$. Тражени правоугаоник је квадрат.

286. Ако је x дужина једне катете, онда друга има дужину $x - m$.

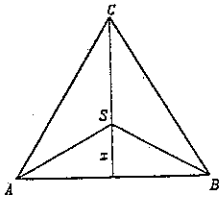
а) Хипотенуза је $c = \sqrt{x^2 + (x - m)^2}$. Функција $f(x) = 2x^2 - 2mx + m^2$ има најмању вредност $x = m/2$, па је у том случају хипотенуза $c = \frac{m}{2}\sqrt{2}$.

б) Површина троугла је $\frac{1}{2}x(m - x)$. Та је површина најьећа за ону вредност од x за коју је функција $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}mx$ има максимум. Добијамо $x = \frac{m}{2}$.

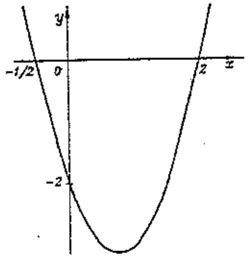
287. Нека је $AB = a$, h висина која одговара страници AB, $PQ = x$ и $PN = y$. Из сличности троугла ABC и QPC, добијамо да је $y = \frac{h(a - x)}{a}$ па је површина правоугаоника $\frac{hx(a - x)}{a}$. Функција $f(x) = -\frac{h}{a}x^2 + \frac{ah}{a}x$ има максимум за $x = \frac{a}{2}$. Према томе, површина правоугаоника је највећа ако је QP средишна дуж троугла ABC.

288. Ако је $DS = x$, (сл. 19), онда су $AS^2 = BS^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$ и $SC^2 = (h - x)^2$. По услову задатка је $y = AS^2 + BS^2 + CS^2$, односно $y = 3x^2 - 2hx + \left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right)$. Из $x = -\frac{b}{2a} = \frac{h}{3}$ добија се $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{1}{6}(4h^2 + 3a^2)$. Решење $x = \frac{1}{3}h$. Значи да је тражена тачка тежиште датог троугла.

289. *Преи начин.* Посматрајмо одговарајућу квадратну функцију $y = 2x^2 - 3x - 2$. Имамо да је $a = 2$, $D = 25 > 0$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, па скица одговарајуће параболе изгледа као на слици 20. Видимо да су вредности посматране квадратне функције позитивне за $x < -\frac{1}{2}$ или $x > 2$. Дакле, скуп решења наше неједачине је скуп $S = (-\infty, -1/2) \cup (2, \infty)$.



Сл. 19



Сл. 20

Други начин. Користићемо се растављањем квадратног тринома на линеарне чиниоце. Имамо $2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$. Производ два реална броја је позитиван ако и само ако су ти бројеви истог знака. Дакле, $(2x+1)(x-2)>0$ ако и само ако је

$$(2x+1>0\wedge x-2>0)\vee(2x+1<0\wedge x-2<0),$$

односно $x<-1/2$ или $x>2$.

Трећи начин. Ова се неједначина може решавати и помоћу схеме у коју уносимо линеарне чиниоце квадратног тринома, реалне бројеве у којима ови чиниоци мењају знак (то су решења одговарајуће квадратне једначине) уписујемо у одговарајућа поља знакове + или −, зависно од тога да ли је тај чинилац позитиван или негативан у том интервалу. У последњу врсту уписујемо квадратни трином, и на описани начин, његов знак. Ми решавамо неједначину $2x^2-3x-2>0$, па су решења наше неједначине вредности непознате x за које је у последњој врсти уписан знак +. То су реални бројеви који задовољавају услов $x<-1/2$ или $x>2$.

		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<2$	2	
$2x+1$	−	0	+	+	+
$x-2$	−	−	−	0	+
$(2x+1)(x-2)$	+	0	−	0	+

290. а) $x<-\frac{5}{2}$ или $x>0$; б) $-1<x<4$; в) $-2<x<\frac{5}{2}$; г) $-1<x<\frac{5}{2}$; д) $x\leq-2$ или $x\geq\frac{3}{2}$; ђ) за све $x\in\mathbf{R}$.

291. а) Ово није квадратна неједначина. Израз на левој страни неједначине није дефинисан за $x=-1$. За $x\neq-1$ је $(x+1)^2>0$ па множењем овим позитивним бројем добијамо еквивалентну неједначину $(x-3)(x+1)\geq0$. Ово је квадратна неједначина и њеним решавањем налазимо $x<-1$ или $x\geq3$. б) $-2<x<-\frac{1}{2}$; в) $-6<x<4$.

292. а) За $x\neq\frac{2}{5}$, $\frac{3x+7}{2-5x}>-1\iff\frac{3x+7}{2-5x}+1>0\iff\frac{2x-9}{5x-2}>0\iff\left(x-\frac{9}{2}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)>0\iff\left(x<\frac{2}{5}\vee x>\frac{9}{2}\right)$. Скуп решења је: $(-\infty,2/5)\cup(9/2,+\infty)$.

б) $\frac{1-x}{x}\leq\frac{2-x}{x-1}\iff\frac{1-x}{x}-\frac{2-x}{x-1}\leq0\iff\frac{1}{x(x-1)}\geq0\iff x(x-1)\geq0\iff(x<0\vee x\geq1)$. Скуп решења је: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.

в) $\frac{11x-10}{2x-1}-\frac{8x}{x+2}>0\iff\frac{-5(x^2-4x+4)}{(2x-1)(x+2)}>0\iff\frac{(x-2)^2}{(2x-1)(x+2)}<0\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)<0\iff\left(-2<x<\frac{1}{2}\right)$. Скуп решења је $(-2,1/2)$.

г) $\frac{3}{x^2-1}<-1\iff\frac{3}{x^2-1}+1<0\iff\frac{x^2+2}{x^2-1}<0\iff x^2-1<0\iff(-1<x<1)$. Скуп решења је $(-1,1)$.

293. а) Да би овај трином био позитиван за све реалне вредности x мора бити коефицијент уз x^2 позитиван и мора дискриминанта тог тринома бити негативна. Одатле, налазимо да мора бити $m+1>0$ и $16-8m(m+1)<0$, што може да се пише у облику $m>-1$ и $-m^2-m+2<0$. Ове неједначине еквивалентне су са $m>-1$ и ($m<-2$ или $m>1$), односно $m>1$.

б) $m>9$; в) $1<m<9$; г) $a=2m^2+m-6>0$ и $D=-4m+24<0$, одакле је $m>6$; д) не постоји такво m; ђ) $m-1<0$ и $-2m^2+2m+1<0$, одакле је $m<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; е) $m-1<0$ и $4(m+1)^2-4(m-1)(m-3)$, одакле је $m<\frac{1}{3}$; ж) $4(4m-1)^2-4(15m^2-2m-7)<0$, односно $m^2-6m+8<0$, одакле је $2<m<4$.

294. а) $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)>0$ еквивалентно је са $x<-2$ или $x>5$. $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)<0$ еквивалентно је са $-4<x<1$. Систем неједначина има за решење онај скуп вредности $x\in\mathbf{R}$ који задовољава обе неједначине. Тај је пресек скуп $A=(-4,-2)$.

б) $3x^2+2x+1>0$ за све $x\in\mathbf{R}$ $(a=3>0,\ D=-4<0)$. $3x^2+2x-1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)>0\iff\left(x<-1\vee x>\frac{1}{3}\right)$. Решење је $\{x\mid x<-1\vee x>1/3\}$.

в) С обзиром на то да је:

$$A=\{x\mid x^2-4>0\}=\{x\mid(x<-2)\vee(x>2)\},$$
$$B=\{x\mid x^2-3x-4<0\}=\{x\mid -1<x<4\},$$

онда скуп $S=A\cap B=\{x\mid 2<x<4\}$ представља скуп решења датог система једначина.

г) $\{x\mid(-3<x<0)\vee(2<x<4)\}$.

295. а) $\frac{-x^2+2x-3}{x^2-4x+3}<3\iff\frac{-x^2+2x-3}{x^2-4x+3}-3<0\iff\frac{-4x^2+14x-12}{x^2-4x+3}<0\iff\frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}>0\iff\frac{(x-2)(x-\frac{3}{2})}{(x-3)(x-1)}>0$. Систем неједначина има за решење онај скуп вредности $x\in\mathbf{R}$ који задовољава неједначине и у бројиоцу и у имениоцу. Решење је скуп $A=(-\infty,1)\cup(3/2,2)\cup(3,+\infty)$. Схематски приказ решења дат је у табели.

	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	
$(x-2)(x-\frac{3}{2})$	+	+	+	−	+	+
$(x-3)(x-1)$	+	+	−	−	−	+
$\frac{(x-2)(x-\frac{3}{2})}{(x-3)(x-1)}$	+	+	−	+	−	+

б) $\{x \mid (x < -2) \vee (-1 < x \leq 0)\}$; в) $\{x \mid (x < -5) \vee (-1 < x < 2) \vee (x > 3)\}$; г) $\{x \mid (-2 < x < 3/2) \vee (3/2 < x < 8/3)\}$.

296. а) У скупу реалних бројева решења дате неједначине су елементи скупа $\{x \mid -1 < x < 4\}$. Овом скупу припадају цели бројеви 0, 1, 2, 3. Према томе, решења ове неједначине у скупу целих бројева су 0, 1, 2 и 3.

б) $\{-1, 3\}$; в) $\{-1, 0, 9, 10\}$; г) $\{-2, 0\}$.

297. Прва неједначина $-2 < \dfrac{-x^2+5x-7}{x-4} \iff 0 < \dfrac{-x^2+7x-15}{x-4}$ је испуњена за свако $x < 4$. Нека је $x < 4$. Тада друга неједначина постаје $-x^2+5x-7 \geq x-4$ и испуњена је за свако $x \in [1, 3]$. Дата неједначина је задовољена за $x \in [1, 3]$.

298. а) Дати систем неједначина може се написати у облику:

$$3x - 2 < x^2 \quad \text{и} \quad x^2 \leq 4x,$$

односно $x^2 - 3x + 2 > 0$ и $x^2 - 4x \leq 0$, па је скуп решења датог система $\{x \mid 0 \leq x < 1 \vee 2 < x \leq 4\}$.

б) $\{x \mid (-2 \leq x \leq 0) \vee (1 \leq x \leq 3)\}$. в) Решавамо систем неједначина $\dfrac{2x}{x^2+1} \geq -1$, $\dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1$. Решење је свако $x \in \mathbf{R}$. г) $1 < x < 6$. д) $\dfrac{3}{4} < x < 1$ или $x > 7$. ђ) $-9 \leq x \leq -1$ или $0 \leq x \leq 1$.

299. а) Функција је дефинисана за $x^2 + 3x + 2 \geq 0$, односно за $x \geq -1$ или $x \leq -2$. б) $x \leq -4$ или $x \geq 3$; в) $x < -2$ или $-1 \leq x \leq 2$ или $x > 3$; г) $x < -3$ или $-2 \leq x \leq 2$ или $x > 4$. **300.** $a \in (-2, 2)$.

301. По захтеву задатка $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 0$ и на основу Виетових формула $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = \dfrac{5a-6}{2}$, добија се неједначина $a^2 - 5a + 6 < 0$ која је задовољена за $a \in (2, 3)$.

302. а) $|x^2 - 5x + 5| < 1 \iff -1 < x^2 - 5x + 5 < 1 \iff x^2 - 5x + 6 > 0 \wedge x^2 - 5x + 4 < 0 \iff (x > 3 \vee x < 2) \wedge (1 < x < 4) \iff (1 < x < 2 \vee 3 < x < 4)$.

б) $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10}] \cup \{-1\} \cup [-3 + \sqrt{10}, +\infty)$; в) $x \in [3 - \sqrt{8}, 3 + \sqrt{8}]$.

303. а) Дата неједначина може се написати у облику система неједначина $x^2 - 5x + 6 > 0$ и $x^2 - 5x - 6 < 0$, чија су решења $\{x \mid (-1 < x < 2) \vee (3 < x < 6)\}$; б) $x \leq 1$ или $x \geq 5$; в) $-3 < x < -2$ или $-1 < x < 1$ или $2 < x < 3$; г) $3/2 \leq x < 2$.

304. а) $\dfrac{|2x-3|+x}{x^2-3x+2} - 1 < 0 \iff \dfrac{|2x-3| - x^2 + 4x - 2}{x^2-3x+2} < 0$

$$\begin{aligned}
&\iff \left(x \geq \frac{3}{2} \wedge \frac{-x^2+6x-5}{x^2-3x+2} < 0\right) \vee \left(x < \frac{3}{2} \wedge \frac{-x^2+2x+1}{x^2-3x+2} < 0\right)\\
&\iff \left(x \geq \frac{3}{2} \wedge \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)} > 0\right) \vee \left(x < \frac{3}{2} \wedge \frac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(x-1)(x-2)} > 0\right)\\
&\iff \left(x \geq \frac{3}{2} \wedge \frac{x-5}{x-2} > 0\right) \vee \left(x < \frac{3}{2} \wedge \frac{x-(1-\sqrt{2})}{x-1} > 0\right)\\
&\iff \left(x > 5 \vee \frac{3}{2} \leq x < 2\right) \vee \left(x < 1-\sqrt{2} \vee 1 < x < \frac{3}{2}\right)\\
&\iff x < 1 - \sqrt{2} \vee 1 < x < 2 \vee x > 5.
\end{aligned}$$

б) $x \in [1/2, 1)$.

305. Лако се види да је, за ма која два реална броја x_1, x_2

$$(x_1 > 0 \wedge x_2 > 0) \iff (x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1x_2 > 0).$$

Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $(p-2)x^2 - 2px + p - 1 = 0$, онда је $x_1 + x_2 = \dfrac{2p}{p-2}$, $x_1x_2 = \dfrac{p-1}{p-2}$. Дакле, решења ове квадратне једначине су реална и позитивна ако и само ако је

$$4p^2 - 4(p-2)(p-1) \geq 0 \wedge \frac{2p}{p-2} > 0 \wedge \frac{p-1}{p-2} > 0.$$

Решавањем ових неједначина добијамо да је последњи услов еквивалентан са

$$p \geq \frac{2}{3} \wedge (p < 0 \vee p > 2) \wedge (p < 1 \vee p > 2), \qquad \text{тј. са } p > 2.$$

Напомене: (1) За $p = 2$ дата једначина се своди на линеарну $-4x + 1 = 0$, чије решење $x = \dfrac{1}{4}$ је позитивно. (2) Задатак се може решавати и директно, решавањем неједначина $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, где $x_{1,2} = \dfrac{p \pm \sqrt{3p-2}}{p-2}$.

306. $D = (m+1)^2 - 4(m+4) = m^2 - 2m - 15 \geq 0$, $x_1 + x_2 = m + 1 < 0$, $x_1x_2 = m + 4 > 0$. Решења су негативна за све $m \in (-4, -3]$.

307. $m \in [4, \infty)$. **308.** $m \in (0, 4)$. **309.** 1° $m \leq 0$ или $m \geq 4$; 2° $m = 2$.

310. Да би једначина била квадратна мора бити $m \neq -1$. По захтеву задатка $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 1$ и на основу Виетових формула $x_1 + x_2 = \dfrac{m-1}{m+1}$, $x_1x_2 = \dfrac{m}{m+1}$ добија се неједнакост $\dfrac{(m-1)^2 - 2m(m+1)}{(m+1)^2} \geq 1$, односно $\dfrac{2m^2+6m}{(m+1)^2} \leq 0$, одакле је $-3 \leq m \leq 0$ и $m \neq -1$.

311. На основу захтева задатка $x_1^2 + x_2^2 + 5(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 5(x_1 + x_2) < 0$ и Виетових формула $x_1 + x_2 = -2m$ и $x_1x_2 = 3(m-2)$ добијамо неједнакост $m^2 - 4m + 3 < 0$ која је тачна за $1 < m < 3$. Како је $D = 4(m^2 - 3m + 6)$ већа од нуле за све $m \in \mathbf{R}$ релација важи за $1 < m < 3$.

312. $-\dfrac{1}{2} < m < 0$ или $0 < m < 2$. **313.** $m < -21$ или $-9 < m < 6$. **314.** $k \leq -7$ или $k > 1$. **315.** $-2 \leq m \leq 2$. **316.** $a^2 - 4b \geq 0$.

317. а) Заменом $y = x^2 - 6$ из прве једначине у другу, добија се квадратна једначина $x^2 - 2x - 3 = 0$, чија су решења $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Када добијене вредности за x заменимо у $y = x^2 - 6$, добијамо $y_1 = -5$, $y_2 = 3$. Решења датог система су уређени парови $(-1, -5)$, $(3, 3)$. *Графичко решење*. Квадратним једначинама $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 4x$ дате су у равни параболе. Ако скицирамо графике ових кривих, видећемо да се оне секу у тачкама $A(-1, -5)$ и $B(3, 3)$ (сл. 21). б) $(-2, 0)$, $(0, 0)$.

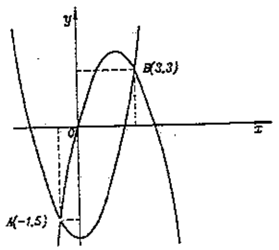
318. а) Овај систем еквивалентан је са системом једначина

$$y = 2x + 1, \qquad 2x^2 + 2x - (2x + 1) - 1 = 0,$$

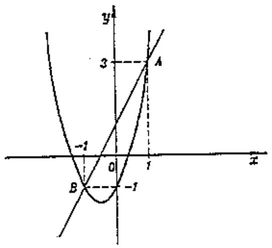
односно са системом

$$y = 2x + 1, \qquad x^2 - 1 = 0.$$

Решења овог ситема су уређени парови $(1, 3)$, $(-1, -1)$. *Графичка интерпретација*. Квадратном једначином $y = 2x^2 + 2x - 1$ дата је у равни парабола. Линарном једначином



Сл. 21



Сл. 22

$y = 2x + 1$ дата је у равни права. Ако скицирамо графике видећемо да се ова крива и ова права секу у тачкама $A(-1, -1)$ и $B(1,3)$ (сл. 22). б) $(-2,3)$, $(0,-1)$.

319. а) Из прве једначине се добија: $x = 7 - 2y$, а заменом те вредности у другој једначини $2y^2 - 7y + 6 = 0$, одакле је $y_1 = 2$, $y_2 = 2/3$. Даље је $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Решења датог система су: $(3,2)$ и $(4, 3/2)$.

б) Задатак се решава као претходни или применом Виетових правила. Решења система су: $(1,2)$ и $(2,1)$. в) $(2,-2)$ и $(-2,2)$. г) $(1,-3)$ и $(-3,1)$.

320. а) $(2,-3)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; б) $(4,5)$, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; в) $(2,1)$, $(4,-1)$.

321. а) $\left(-\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right)$ и $(2,1)$; б) $(4,2)$ и $(2,4)$; в) $(-1,4)$ и $(3,2)$.

г) Сменом $x^2 = u$, $y^2 = v$, систем се своди на систем линеарних једначина

$$u + v = 25, \qquad u + 2v = 41,$$

одакле је $u = 9$, $v = 16$. Даље је $x = \pm 3$, $y = \pm 4$, па су решења датог система: $(3,4)$, $(3,-4)$, $(-3,4)$, $(-3,-4)$.

322. а) $(9,7)$, $(9,-7)$, $(-9,7)$, $(-9,-7)$.

б) Сменом $y^2 = z$ добија се систем:

$$x + z = 7, \qquad xz = 12.$$

Решења датог система су: $(4, \sqrt{3})$, $(4, -\sqrt{3})$, $(3,2)$, $(3,-2)$.

323. а) Сменом $x^2 = u$ и $-y = v$, добија се систем

$$u + v = 23, \qquad u \cdot v = -50.$$

Решења датог система су: $(5,2)$, $(-5,2)$, $(i\sqrt{2}, -25)$, $(-i\sqrt{2}, -25)$.

б) $(3,2)$ и $(2,3)$.

324. а) $(4,-1)$ и $(2,1)$. б) $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{4}\right)$.

325. а) Увођењем смена $x + y = u$ и $xy = v$ систем једначина добија облик

$$u + v = 11, \qquad uv = 30,$$

чија су решења $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ и $u_2 = 6$, $v_2 = 5$. У односу на x и y добијају се два система:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решења првог система су: $(5,1)$ и $(1,5)$, а другог: $(2,3)$ и $(3,2)$. Решења се најједноставније добијају применом Виетових формула.

б) Дати систем еквивалентан је са:

$$(x + y)^2 - xy = 4, \qquad x + y + xy = 2.$$

Решења су: $(2,0)$, $(0,2)$, $\left(-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{11}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{11}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}\right)$.

326. а) $(1,4)$, $(4,1)$, $\left(-\frac{7}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}, -\frac{7}{2} - \frac{i\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(-\frac{7}{2} - \frac{i\sqrt{15}}{2}, -\frac{7}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}\right)$.

б) $(3,1)$, $(1,3)$, $\left(-\frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}, -\frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{2}\right)$.

в) Одузимањем се добија: $y - x = 5$, што значи да треба решити систем:

$$y - x = 5, \qquad x + xy = 55.$$

Решења су: $(5,10)$ и $(-11,-6)$.

г) $(3,4)$, $(4,3)$, $\left(\frac{-16 + 8\sqrt{10}}{7}, \frac{-16 - 8\sqrt{10}}{7}\right)$, $\left(\frac{-16 - 8\sqrt{10}}{7}, \frac{-16 + 8\sqrt{10}}{7}\right)$.

327. а) Ако се $x^2 + y^2$ изрази у облику $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, дати систем постаје

$$2(x + y)^2 - 4xy - 5(x + y) = 1, \qquad 5xy - 2(x + y) = 20.$$

Решења су: $(2,3)$, $(3,2)$, $\left(-\frac{17}{20} + \frac{i\sqrt{1039}}{20}, -\frac{17}{20} - \frac{i\sqrt{1039}}{20}\right)$, $\left(-\frac{17}{20} - \frac{i\sqrt{1039}}{20}, -\frac{17}{20} + \frac{i\sqrt{1039}}{20}\right)$.

б) Ако се у првој једначини система уведе нова непозната $z = x - y$, добија се квадратна једначина $z^2 + 4z - 21 = 0$ чија су решења $z_1 = 3$, $z_2 = -7$. На тај начин се дати систем замењује системима

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ xy &= 28 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} x - y &= -7 \\ xy &= 28 \end{aligned}$$

Решења датог система су:

$$(7,4), \quad (-4,-7), \quad \left(\frac{-7 + \sqrt{161}}{2}, \frac{7 + \sqrt{161}}{2}\right), \quad \left(\frac{-7 - \sqrt{161}}{2}, \frac{7 - \sqrt{161}}{2}\right).$$

в) Дати систем еквивалентан је са

$$x^2 + y^2 = 8, \qquad x^2y^2 = 16.$$

Решења су: $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$.

г) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$.

328. а) $\left(a, \frac{1}{2}a\right)$ и $\left(\frac{1}{2}a, a\right)$. б) $(a,-a)$ и $(-a,a)$. в) (p,q) и (q,p).

г) За $|x| \neq |y|$ прва се једначина трансформише у једначину: $a(x - y) + b(x + y) = (x + y)(x - y)$, а друга у $(x + y)(x - y) = 4ab$. Елиминисањем $x - y$ из ових двеју једначина добијамо

$$b(x + y)^2 - 4ab(x + y) + 4a^2b = 0,$$

одакле је за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x + y = 2a$, а затим и $x - y = 2b$, па је решење датог система: $(a+b, a-b)$ за $a \neq 0$, $b \neq 0$; $(b/2, -b/2)$ за $a = 0$, $b \neq 0$; $(a/2, a/2)$ за $a \neq 0$, $b = 0$; нема решења за $a = b = 0$.

329. а) Прва од датих једначина је хомогена. После деобе са y^2 и смене $x = yz$, $y \neq 0$, добија се $z^2 - 4z + 3 = 0$, одакле је $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Одговарајуће једначине $x = y$ и $x = 3y$ са другом једначином датог система образују два нова система:

$$\begin{aligned} x &= y, \\ x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} x &= 3y, \\ x + 2y &= 5. \end{aligned}$$

Решења задатог система су: $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$, $(3,1)$. б) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ и $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$.

в) $(1,1)$, $(3,3)$, $(2,1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

г) $(-3,1)$, $(3,-1)$, $(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $(-2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

д) $(4,2)$, $(-4,-2)$, $\left(\sqrt{15}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{15}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

330. а) За $|k| \leq 2\sqrt{2}$ решења су:

$$\left(\frac{k + \sqrt{8-k^2}}{2}, \frac{-k + \sqrt{8-k^2}}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{k - \sqrt{8-k^2}}{2}, \frac{-k - \sqrt{8-k^2}}{2}\right).$$

За $|k| > 2\sqrt{2}$ нема реалних решења. б) За $|m| \leq 25$ решења су реална, а за $|m| > 25$ решења су конјуговано-комплексна.

в) $\left(\frac{2k - 1 \pm \sqrt{-4k^2 + 28k + 1}}{4}, \frac{2k - 1 \mp \sqrt{-4k^2 + 28k + 1}}{4}\right)$.

г) $\left(\pm\sqrt{\frac{a}{2}(2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 16}) - 2}, \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 16}}{2}\right)$.

331. а) Системи једначина:

$$1^\circ \; \begin{aligned} x + y &= 5, \\ xy &= 6. \end{aligned} \qquad 2^\circ \; \begin{aligned} x + y &= 5, \\ xy &= -6. \end{aligned} \qquad 3^\circ \; \begin{aligned} x + y &= -5, \\ xy &= 6. \end{aligned} \qquad 4^\circ \; \begin{aligned} x + y &= -5, \\ xy &= -6. \end{aligned}$$

дају решења задатог система: $(2,3)$, $(3,2)$, $(6,-1)$, $(-1,6)$, $(-2,-3)$, $(-3,-2)$, $(-6,1)$, $(1,-6)$.

б) $(0,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

332. а) $(2,1)$, $\left(-\frac{16}{7}, -\frac{8}{7}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{4}, \frac{-1+\sqrt{65}}{4}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{4}, \frac{-1-\sqrt{65}}{4}\right)$.

б) $\left(\frac{25}{7}, \frac{5}{7}\right)$, $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{-2+2\sqrt{31}}{3}, \frac{-1+\sqrt{31}}{3}\right)$, $\left(\frac{-2-2\sqrt{31}}{3}, \frac{-1-\sqrt{31}}{3}\right)$.

333. а) Ако прву једначину помножимо са 7, а другу са 19, добићемо:

$$7x^2 + 7xy + 7y^2 = 133, \qquad 19x^2 - 19xy + 19y^2 = 133.$$

Одузимањем прве једначине од друге, добија се хомогена једначина

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0,$$

која заједно са једном од датих једначина даје решења: $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$ која су у исто време и решења датог система.

б) $(1,-2)$, $(-1,2)$, $\left(\frac{11\sqrt{2}}{2}i, \frac{19\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\left(-\frac{11\sqrt{2}}{2}i, -\frac{19\sqrt{2}}{2}i\right)$.

в) $(20,10)$, $(-20,-10)$, $\left(-\frac{40\sqrt{7}}{7}, \frac{10\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(\frac{40\sqrt{7}}{7}, -\frac{10\sqrt{7}}{7}\right)$.

г) $(3,5)$, $(-3,-5)$, $\left(\frac{15\sqrt{58}}{29}, \frac{4\sqrt{58}}{29}\right)$, $\left(-\frac{15\sqrt{58}}{29}, -\frac{4\sqrt{58}}{29}\right)$.

334. $(2,1)$, $(-2,-1)$, $\left(\frac{15\sqrt{137}}{137}, -\frac{\sqrt{137}}{137}\right)$, $\left(-\frac{15\sqrt{137}}{137}, \frac{\sqrt{137}}{137}\right)$.

335. Из друге једначине система добијамо $x = 2$ или $y = 1$, па имамо два система једначина:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5x = 5, \\ \hfill x = 2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ \hfill y = 1 \end{cases}$$

Решења задатог система су: $(2,3)$, $(0,1)$, $(3/2,1)$.

336. Из прве једначине система следи да је $y^2 = (2x+1)^2$, тј. $y = 2x+1$ или $y = -2x-1$, па имамо два система једначина:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 3xy = 1, \\ \hfill y - 2x = 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x^2 + y^2 + 3xy = 1, \\ \hfill 2x + y = -1 \end{cases}$$

Решења задатог система су: $(0,1)$, $(-1/2,0)$, $(0,-1)$.

337. Из прве једначине се добија $y = 5 - x^2$, а заменом те вредности у другој једначини $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Решења задатог система једначина су: $(1,4)$, $(-1,4)$, $(2,1)$, $(-2,1)$.

338. Како је $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ и $x^2 - xy + y^2 = 7$, следи да је $x + y = 5$. Како је $x^2 - xy + y^2 = 7$ еквивалентно са $(x+y)^2 - 3xy = 7$, систем се своди на систем $x + y = 5$, $xy = 6$, чија су решења $(3,2)$ и $(2,3)$ у исто време и решења задатог система.

339. Када другу једначину помножимо са 3 и саберемо са првом добијамо еквивалентан систем:

$$(x+y)^3 = 27, \qquad x^2y + xy^2 = 6.$$

Како је $(x+y)^3 = 27$ еквивалентно са $x + y = 3$, следи да је

$$x + y = 3, \qquad x^2y + xy^2 = 6,$$

чија су решења $(1,2)$ и $(2,1)$ у исто време решења задатог система.

340. Решава се као претходни задатак. Решење је $(1,1)$.

341. *Упутство.* Одузимањем друге једначине од прве добијамо: $x + y - xy = 1$. Ако другу једначину система напишемо у облику: $(x+y)^2 - xy = 7$, добија се еквивалентан систем:

$$x + y - xy = 1, \qquad (x+y)^2 - xy = 7.$$

Решења задатог система су $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,-3)$, $(-3,1)$.

342. Увођењем смене $\frac{x+y}{x-y} = z$ прва једначина система добија облик $5z^2 - 26z + 5 = 0$, чија су решења $z_1 = 5$, $z_2 = \frac{1}{5}$, односно

$$\frac{x+y}{x-y} = 5 \qquad \text{или} \qquad \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{5}.$$

Из једначине $\frac{x+y}{x-y} = 5$ добијамо $y = \frac{2}{3}x$ и решавамо са једначином $xy = 6$. На исти начин поступићемо и са једначином $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{5}$. Решења задатог система су: $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(3i,-2i)$, $(-3i,2i)$. **343.** $(\pm 1, \mp 9)$, $(\pm 9, \pm 1)$.

344. Како je $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy) = 481$ и $x^2+y^2+xy = 37$, следи да je $x^2+y^2-xy = 13$, па се дати систем своди на

$$x^2+y^2-xy = 13, \qquad x^2+y^2+xy = 37.$$

Решења задатог система су: $(4,3)$, $(3,4)$, $(-4,-3)$, $(-3,-4)$.

345. Једначина $x^2+xy+y^2 = 19(x-y)^2$ je еквивалентна са једначином $6x^2-13xy+6y^2 = 0$, која са $x^2-xy+y^2 = 7(x-y)$ даје решења: $(0,0)$, $(3,2)$, $(-2,-3)$.

346. Растављајући на чиниоце дате једначине, добијамо:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-19) = 0, \qquad (x+y)(x^2-xy+y^2-7) = 0.$$

1° Ако je $x-y=0$, односно $x=y$, заменом у другој једначини добијамо: $2x^3-14x=0$, чија су решења $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{7}$, тj. $y_1 = 0$, $y_{2,3} = \pm\sqrt{7}$.

2° Ако je $x+y=0$, односно $x=-y$ из прве једначине добијамо $2x^3-38x=0$, чија су решења: $x_{4,5} = \pm\sqrt{19}$, $y_{4,5} = \mp\sqrt{19}$.

3° Из система

$$x^2+xy+y^2 = 19, \qquad x^2-xy+y^2 = 7$$

добијамо решења: $x_{6,7} = \pm 3$, $x_{8,9} = \pm 2$, $y_{6,7} = \pm 2$, $y_{8,9} = \pm 3$.

Решења датог система су: $(0,0)$, $(\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{7})$, $(\pm\sqrt{19}, \mp\sqrt{19})$, $(\pm 3, \pm 2)$, $(\pm 2, \pm 3)$.

347. Деобом датих једначина, добијамо

$$\frac{x+xy^2+xy^4}{1+y+y^2} = 15. \tag{1}$$

Користећи се једнакошћу $1+y^2+y^4 = (1+y+y^2)(1-y+y^2)$ из (1) следи $x(1-y+y^2) = 15$, па се задати систем своди на

$$x(1+y+y^2) = 35, \qquad x(1-y+y^2) = 15.$$

Деобом прве једначине са другом, добија се $\frac{1+y+y^2}{1-y+y^2} = \frac{7}{3}$, односно $4y^2-10y+4=0$, чија су решења: $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Решења задатог система су: $(5,2)$ и $(20,1/2)$.

348. Из $\frac{x+3}{y-3} = \frac{y}{x}$, $\frac{x-3}{y+3} + \frac{78}{55} = \frac{y}{x}$ добијају се решења $(5,8)$ и $\left(-\frac{33}{13}, \frac{6}{13}\right)$.

349. Из $xy = 180$, $(x+3)(y+3) = 270$, следе решења $(15,12)$ и $(12,15)$.

350. Из $x^2+y^2 = 400$, $(x+6)^2+(y+8)^2 = 900$ добија се решење $x = 12$, $y = 16$.

351. Ако je x цифра десетица, а y цифра јединица тада je: $10x+y = 3(x+y)$, $(x+y)^2 = 3(10x+y)$, одакле je $x = 2$, $y = 7$.

352. Из $10x+y = 2xy$, $10x+y+27 = 10y+x$ следи да je $x=3$, $y=6$. Вредности $x = -\frac{1}{2}$ и $y = \frac{5}{2}$ не задовољавају услове задатка.

353. Обим правоугаоника je $2a+2b = 280$, одакле je $a+b = 140$. Површина преосталог дела врста je $(a-2)(b-2) = 3255$, односно $ab-2(a+b) = 3251$. Решавањем система

$$a+b = 140, \qquad ab-2(a+b) = 3251,$$

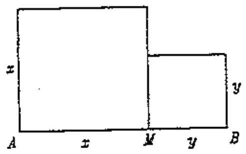
добијају се вредности димензија правоугаоника $a = 107\,\mathrm{m}$, $b = 33\,\mathrm{m}$.

358. $x+y = 11$, $x^2+y^2 = 65$. Решења су: $AM = x = 7\,\mathrm{cm}$, $MB = 4\,\mathrm{cm}$ (сл. 23), или обратно.

355. Нека су b и c дужине катета, а a дужина хипотенузе. По услову задатка и применом Питагорине теореме добијамо систем једначина

$$b+c = 17, \qquad b^2+c^2 = 169,$$

чија су решења: $b=5$, $c=12$ и $b=12$, $c=5$, па je површина троугла $P = \frac{b\cdot c}{2} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. 23

356. Нека je y његова просечна брзина од места B до A, а x од места A до B. Аутомобил на вожњи у првом смеру провешће $\frac{315}{y}$, а у другом смеру $\frac{315}{x}$ часова. Према услову задатка добија се систем једначина

$$y = x+24, \qquad \frac{315}{x} + \frac{315}{y} = 9.$$

Решења система су: $(60,84)$, $(-14,10)$. Само прво решење система задовољава постављени проблем јер се брзина изражава реалним позитивним бројевима ($v_{AB} = 84\,\mathrm{km/h}$, $v_{BA} = 60\,\mathrm{km/h}$).

357. По услову задатка je $ab = 12$, $abc = 60$, одакле je $c = 5$. Даље je

$$a^2+b^2 = 25, \qquad ab = 12.$$

Решења датог система су: $(3,4)$ и $(4,3)$, па су странице троугла: $a=3$, $b=4$, $c=5$ или $a=4$, $b=3$, $c=5$.

358. Нека су x и y тражене димензије пода. По услову задатка je $2x+2y = 2l$, односно

$$x+y = l, \qquad x^2+y^2 = d^2.$$

Решења система, односно димензије пода су:

$$x_1 = \frac{l+\sqrt{2d^2-l^2}}{2}, \quad y_1 = \frac{l-\sqrt{2d^2-l^2}}{2};$$
$$x_2 = \frac{l-\sqrt{2d^2-l^2}}{2}, \quad y_2 = \frac{l+\sqrt{2d^2-l^2}}{2}.$$

1° Ако je $2d^2-l^2 > 0$, решења су реална и позитивна. Под има облик правоугаоника.

2° За $2d^2-l^2 = 0$, решења су реална, позитивна и једнака. Под има облик квадрата ($l = d\sqrt{2}$).

3° За $2d^2-l^2 < 0$, решења су конјуговано-комплексна па су као таква немогућа за услов задатка.

359. Из $10x+y = x^2+y^2+1$, $10x+y = 2xy+5$, добијају се решења $(7,5)$, $(3,5)$, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Задовољавају само бројеви 75 и 35.

360. а) *Први начин*: Решење, „импликацијском“ методом. Област дефинисаности je $x \geq -5$. За $x \geq -5$ имамо

$$2\sqrt{x+5} = x+2 \implies 4(x+5) = (x+2)^2 \iff x^2-16 = 0 \iff (x=-4 \vee x=4).$$

Провером за $x = -4$ добија се $2 = -2$, а за $x = 4$ је $2\sqrt{9} = 6$, па број -4 није решење, а број 4 јесте решење једначине.

Други начин: Решавање „еквиваленцијском“ методом

$$\begin{aligned}&2\sqrt{x+5} = x+2 \iff 4(x+5) = (x+2)^2 \land x+5 \geq 0 \land x+2 \geq 0\\ &\iff x^2 - 16 = 0 \land x \geq -5 \land x \geq -2\\ &\iff (x = -4 \lor x = 4) \land x \geq -5 \land x \geq -2\\ &\iff x = 4.\end{aligned}$$

Дакле, број 4 је једино решење полазне једначине.

б)
$$\begin{aligned}&\sqrt{4+2x-x^2} = x-2 \iff 4+2x-x^2 = (x-2)^2 \land x \geq 2\\ &\iff 2x^2 - 6x = 0 \land x \geq 2 \iff (x = 0 \lor x = 3) \land x \geq 2\\ &\iff x = 3.\end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned}&\sqrt{x+2} = x \iff x+2 = x^2 \land x \geq 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \land x \geq 0\\ &\iff (x = -1 \lor x = 2) \land x \geq 0 \iff x = 2.\end{aligned}$$

г)
$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1} \iff x^2 - 5 = x+1 \land x^2 - 5 \geq 0 \land x+1 \geq 0\\ &\iff x^2 - x - 6 = 0 \land x+1 \geq 0\\ &\iff (x = -2 \lor x = 3) \land x \geq -1\\ &\iff x = 3.\end{aligned}$$

д) Област дефинисаности је $\{x \in \mathbf{R} \mid x+2 \geq 0 \land 2x-3 \geq 0\}$, тј. $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3/2\}$. Подесно је једначину трансформисати у облик

$$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{2x-3}, \qquad x \in D_f,$$

а затим квадрирати. Добија се еквивалентна једначина

$$x+2 = 1 + 2\sqrt{2x-3} + 2x - 3, \qquad x \in D_f,$$

односно

$$4 - x = 2\sqrt{2x-3}, \qquad x \in D_f.$$

Последња једначина је еквивалентна са

$$(4-x)^2 = 4(2x-3) \land x \leq 4 \land x \in D_f.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = 2$, $x_2 = 14$, али због услова $x \leq 4$, једино решење је $x_1 = 2$.

ђ)
$$\begin{aligned}&\sqrt{2x^2-x} = x-2 \iff 2x^2 - x = (x-2)^2 \land x \geq 2\\ &\iff x^2 + 3x - 4 = 0 \land x \geq 2\\ &\iff (x = -4 \lor x = 1) \land x \geq 2.\end{aligned}$$

Према томе, једначина нема решења.

361. а) Област дефинисаности је $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 5\}$, па закључујемо да је лева страна једначине стога већа од нуле.

б) $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 5 \land x \leq 2\}$, па закључујемо да једначина није нигде дефинисана.

в) Због $x^2 - 1 \geq 0$, $1 - x^2 \leq 0$, једино је могуће $x = 1$, али $x = 1$ није решење једначине.

г) Због $x \geq 2$, $x \leq 2$, једино је могуће $x = 2$, али $x = 2$ није решење једначине.

362. а) Једначина има смисла за $x \leq \frac{9}{5}$. Тада је

$$\begin{aligned}&\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}} \iff \sqrt{9-5x} = \frac{9-x}{\sqrt{3-x}}\\ &\implies 9 - 5x = \frac{(9-x)^2}{3-x} \iff 2x^2 - 3x - 27 = 0\\ &\iff x = -3.\end{aligned}$$

Непосредним проверавањем се утврђује да је $x_1 = -3$ решење дате једначине.

Напомена. Обратите пажњу на знаке еквиваленције и импликације. На месту где се налази, знак $\implies$ је правилно употребљен: из $a = b$ следи $a^2 = b^2$, али обрнуто не важи. Последњи знак еквиваленције је такође исправно употребљен, јер све што радимо, радимо под претпоставком да је $x < \frac{9}{5}$ (друго решење квадратне једначине је $9/2 > 9/5!$). Провера да је $x = -3$ заиста решење је неопходна, како је горе доказано само: x је решење $\implies x = -3$.

б) Једначина има смисла ако је $3x^2 - 7x + 3 \geq 0$ и $1 - x \geq 0$.

$$\begin{aligned}&1 - x = \sqrt{3x^2-7x+3}\\ &\iff 1 - x \geq 0 \land 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \land (1-x)^2 = 3x^2 - 7x + 3\\ &\iff x \leq 1 \land 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \land 2x^2 - 5x + 2 = 0\\ &\iff x \leq 1 \land 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \land \left(x = 2 \lor x = \frac{1}{2}\right)\\ &\iff (x \leq 1 \land 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \land x = 2) \lor \left(x \leq 1 \land 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \land x = \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Први део дисјункције је нетачан, па је даље

$$\begin{aligned}&1 - x = \sqrt{3x^2-7x+3} \iff \left(x \leq 1 \land 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \land x = \frac{1}{2}\right)\\ &\iff \left(\frac{1}{2} < 1 \land \frac{3}{4} - \frac{7}{2} + 3 \geq 0 \land x = \frac{1}{2}\right) \iff x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Дакле, једначина има јединствено решење $x = \frac{1}{2}$.

Напомена. Уместо прве еквиваленције у горњем низу еквиваленција може се писати

$$1 - x = \sqrt{3x^2-7x+3} \implies (1-x)^2 = 3x^2 - 7x + 3,$$

па се добија

$$1 - x = \sqrt{3x^2-7x+3} \implies x = 2 \lor x = \frac{1}{2}.$$

Ово тврђење је тачно иако $x = 2$ није решење једначине. Уствари, ако се једначина овако решава, мора се на крају проверити које од добијених вредности су решења.

в) $x = -1$; г) $x = 0$; д) $x = \frac{7}{2}$; ђ) $x = 5$.

363. а) $x = -\frac{2}{3}a$; б) $x = \sqrt{2}$.

364. а) $x = -4 \vee x = 3$; б) $x = 1$; в) $x = 4 \vee x = -1/8$; г) $x = 6$.

365. а) $x = 3$; б) $x = 1$; в) $x = 3$; г) $x_1 = -8$, $x_2 = 6$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{37}$.

д) За $x < 1$ једначина нема смисла. Ако је $x \geq 1$, онда се квадрирањем леве и десне стране једначине, после сређивања, добија еквивалентна једначина $2(x+1) = 2(x+1) \wedge x \geq 1$, а то је идентитет. Дакле, решења дате једначине су све реалне вредности x за које $x \geq 1$.

366. а) Напишимо:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2}.$$

Област дефинисаности овде је читав скуп реалних бројева. Степеновањем са три добијамо еквивалентну једначину

$$x + x + 1 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) = -x - 2.$$

У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}$, који је лева страна дате једначине, па га можемо заменити десном страном дате једначине. Добијамо

$$\sqrt[3]{x(x+1)}(-\sqrt[3]{x+2}) = -(x+1)$$

или

$$\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)} = x + 1,$$

одакле степеновањем са 3 добијамо

$$x(x+1)(x+2) = (x+1)^3.$$

Решење ове једначине је $x_1 = -1$, а после провере закључујемо да је $x_1 = -1$ решење и дате једначине.

б) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. в) $x_1 = -a$, $x_2 = a$ за $a \neq 0$; $x \in \mathbf{R}$ за $a = 0$.

г) Заменом $\sqrt[3]{x} = z$ једначина добија облик $2z^2 - 5z - 3 = 0$, чија решења су $z_1 = 3$ и $z_2 = -1/2$. Решења дате једначине су: $x_1 = 27$, $x_2 = -1/8$.

д) $x_1 = -1$. ђ) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

367. а) Област једнакости је интервал $2 \leq x \leq 4$. Заменом $\sqrt[4]{x-2} = u \geq 0$, $\sqrt[4]{4-x} = v \geq 0$, добијамо систем једначина

$$u^4 + v^4 = 2, \qquad u + v = 2.$$

Ако означимо $uv = t$, трансформацијом леве стране прве једначине, добићемо

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 = ((u+v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 \\ &= (4-2t)^2 - 2t^2 = 16 - 16t + 2t^2 = 2, \end{aligned}$$

односно квадратну једначину $t^2 - 8t + 7 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$, $t_2 = 7$. Преостаје да се реше системи:

$$\begin{aligned} u + v &= 2 \qquad & u + v &= 2 \\ uv &= 1, \qquad & uv &= 7. \end{aligned}$$

Решења првог система је уређен пар $(1, 1)$, па добијамо $\sqrt[4]{x-2} = u = 1$, $x = 3$. Други систем једначина нема решења. Како добијено решење припада интервалу у коме је једначина дефинисана, то је решење $x_1 = 3$.

б) $x_1 = -40$, $x_2 = 40$. в) $x_1 = -79$, $x_2 = 1$. г) $x_1 = -45$, $x_2 = 20$.

368. Једначина је дефинисана за $x \leq -1$ и $x \geq 1$. За $x \neq \pm 1$ деобом обе стране једначине са $\sqrt[4]{x^2-1}$, добија се

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{2}.$$

Заменом $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = t > 0$ последња једначина добија облик $2t^2 - 3t - 2 = 0$, одакле је $t_1 = -\dfrac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Решење $t_1 = -\dfrac{1}{2}$ не одговара услову задатка. Из $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = 2$, добијамо да је $x_1 = -\dfrac{17}{15}$ једино решење наше једначине.

369. а) Једначина је дефинисана за $x \neq 1$, $x \neq 0$. Заменом $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}} = t$, добијамо једначину $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$ $(t \neq 0)$ или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, одакле је $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Из $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}} = \dfrac{1}{2}$ имамо $x_1 = -\dfrac{1}{511}$. Из $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}} = 2$, добија се $x_2 = 2$.

б) Дата једначина еквивалентна је са $\sqrt[5]{3+x}\,\dfrac{x+3}{3x} = \dfrac{64}{3}\sqrt[5]{x}$, односно са $\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^{6/5} = 2^6$, одакле је $\left|\dfrac{3+x}{x}\right| = 32$. Даље је 1° $\dfrac{3+x}{x} = 32$, $x_1 = \dfrac{3}{31}$; 2° $\dfrac{3+x}{x} = -32$, $x_2 = -\dfrac{1}{11}$.

370. Дата неједначина еквивалентна је систему неједначина

$$x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2 \wedge x^2 - 5x + 4 \geqslant 0 \wedge x - 3 > 0.$$

Дакле, тражимо заједничка решења неједначина

$$x - 5 < 0, \quad x^2 - 5x + 4 \geqslant 0, \quad x - 3 > 0.$$

Прву неједначину задовољавају сви бројеви x за које је $x < 5$, другу сви бројеви из интервала $(-\infty, 1]$ и из интервала $[4, +\infty)$, трећу сви бројеви за које је $x > 3$. Према томе, решења дате неједначине су бројеви за које је $4 \leqslant x < 5$.

а) $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \wedge x - 3 > 0 \wedge x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2 \iff (x \leq 1 \vee x \geq 4) \wedge x > 3 \wedge x < 5 \iff 4 \leq x < 5$;

б) $x + 5 \geq 0 \wedge 1 - x > 0 \wedge x + 5 < (1-x)^2 \iff -5 \leq x < -1$;

в) $x \geq 4$; г) $2 \leq x \leq 3$; д) $0 \leq x \leq 3$; ђ) $x \leq -2 \vee 5 \leq x < \dfrac{74}{13}$.

371. а) 1° $(-x^2 + x + 6 \geq 0) \wedge (1 - x < 0) \iff x \in [-2, 3] \wedge x \in (1, +\infty) \iff x \in (1, 3]$. 2° $(1 - x \geq 0) \wedge (-x^2 + x + 6 > (1-x)^2) \iff x \in (-\infty, 1] \wedge (-2x^2 + 3x + 5 > 0) \iff x \in (-\infty, 1] \wedge x \in (-1, 5/2) \iff x \in (-1, 1]$. Према томе, решење дате неједначине је унија скупова под 1° и 2°, односно $S = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 3\}$.

б) 1° $(x^2 - 4x \geq 0 \wedge x - 3 < 0) \iff x \leq 0$; 2° $(x^2 - 4x \geq 0 \wedge x - 3 > 0 \wedge x^2 - 4x > (x-3)^2) \iff x > 9/2$. Према томе, скуп решења дате неједначине је $S = \{x \mid x \leq 0 \vee x > 9/2\}$.

в) $x \leq -3 \vee x \geq 3$. г) $x \leq -2 \vee x > \dfrac{39}{5}$. д) $x \leq -3 \vee x > \dfrac{16}{3}$. ђ) $-2 \leq x < 2$.

372. а) Дата неједначина еквивалентна је систему неједначина

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \wedge x^2 - x - 2 > 4.$$

Решење система неједначина а истовремено и дате неједначине је $S = \{x \mid x < -2 \vee x > 3\}$.

б) $\dfrac{1}{2} < x \leq 2$; в) $\left(-4 \leq x \leq -\dfrac{11}{4}\right) \vee (4 \leq x \leq 5)$; г) $3 < x < 5$.

373. а) Како је десна страна неједначине ненегативна, онда је дата неједначина еквивалентна систему неједначина:

$$x+7>0 \wedge (x+7)>\frac{1}{16}(x-5)^2,$$

па њена решења образују скуп $\{x \mid -3<x<29\}$.

б) Неједначина има смисла за $x \neq 0$ и $1-x^2>0$, тј. $-1 \leq x<0 \vee 0<x \leq 1$.
1° За $x>0$ после сређивања добија се $\sqrt{3}-\sqrt{x} \leq \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$, а квадрирањем $2x^2-\sqrt{3}x \leq 0$, одакле је $x \in (0, \sqrt{3}/2]$.
2° За $x \leq 0$ налазимо $x \in [-1,0)$. Према томе, скуп решења дате неједначине је $S = [-1,0) \cup (0, \sqrt{3}/2]$. в) $-2 \leq x<2$; г) $-1<x \leqslant -\frac{1}{3} \vee x>3$.

374. а) Неједначина има смисла за $x+6 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \wedge 2x-5 \geq 0$, односно за $x \in A = \{x \mid x \geq 5/2\}$. Квадрирањем добијамо

$$(\sqrt{x+6})^2>(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5})^2,$$

односно

$$\sqrt{(x+1)(2x-5)}<5-x;$$

решења ове неједначине чине скуп $B = \{x \mid -10<x \leq 1 \vee 5/2 \leq x<3\}$. Према томе, скуп $S = A \cap B = \{x \mid 5/2 \leq x<3\}$ представља скуп решења дате неједначине.

б) $5 \leq x<86$; в) $2 \leq x<2\sqrt{\frac{7}{3}}$; г) $x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$; д) $\frac{19}{3} \leq x<9$; ђ) $x>3$.

375. а) $x<-4 \vee x>-1$; б) $-1<x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x<2$; в) $-\frac{3}{2} \leq x<-\frac{2}{3} \vee x>3$; г) $x \leq -\frac{1}{3} \vee 1 \leq x \leq 5$; д) $4<x<7$; ђ) $-\sqrt{2}<x<3$; е) $x \leq \frac{-5-\sqrt{97}}{6} \vee \frac{-5+\sqrt{97}}{6} \leq x<2$; ж) $-3 \leq x \leq 9$.

376. Заменом $x = t^2-2$, $t \geq 0$, (што је еквивалентно са $\sqrt{x+2} = t$, $x \geq -2$) дата једначина добија облик

$$\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-10t+25} = 4,$$

односно

$$|t-1|+|t-5| = 4. \tag{1}$$

1° Ако је $t<1$ једначина (1) се своди на $-t+1-t+5 = 4$, $t = 1$, па једначина нема решења за $t<1$.
2° Ако је $1 \leq t \leq 5$, тада је $t-1-t+5 = 4$, или $4 = 4$, па су све вредности t које припадају одсечку $1 \leq t \leq 5$ решења једначине.
3° Ако је $t>5$, тада је $t-1+t-5 = 4$, $t = 5$ па једначина нема решења за $t>5$.
Решења дате једначине добијамо из $1 \leq \sqrt{x+2} \leq 5$, те је скуп решења $\{x \mid x \in [-1,23]\}$.

377. Дата једначина еквивалентна је са

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1 \iff |\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3| = 1. \tag{1}$$

Решимо најпре једначину

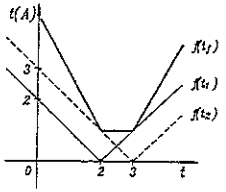
$$|t-2|+|t-3| = 1. \tag{2}$$

1° $t>3$. Једначина (2) се своди на једначину $2t-6 = 0$ која нема решења за $t>3$.
2° $2 \leq t \leq 3$. Једначина (2) се своди на $1 = 1$, дакле тачна је за свако $t \in [2,3]$.
3° $t<2$. Једначина (2) нема решења за $t<2$. Решења једначине (1) добијамо из $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$, дакле $S = \{x \mid x \in [5,10]\}$.

Графичко „решење“: Једначину

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

сменом $\sqrt{x-1} = t$, можемо писати као $|t-2|+|t-3| = 1$. Нацртајмо графике $f_1(t) = |t-2|$, $f_2(t) = |t-3|$. Графичким сабирањем, добијамо (сл. 24) $f_3(t) = |t-2|+|t-3|$. „Очигледно“ је: $f_3(t) = 1$ за $t \in [2,3]$, чему одговара сегмент $x \in [5,10]$.



Сл. 24

378. а) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1-\sqrt{x} \wedge x \leq 1 \wedge x \geq 0 \iff x-\sqrt{1-x} = 1-2\sqrt{x}+x \implies 1-x = 1-4\sqrt{x}+4x \implies 4\sqrt{x} = 5x \implies x = 0 \vee x = \frac{16}{25}$. Непосредним проверавањем утврђујемо да је $x = \frac{16}{25}$ једино решење једначине.

б) Једначина има смисла ако је $x+1 \leq 0$ и $x+5-4\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1}-2)^2 \geq 0$. Дакле, $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}-2 \iff \sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2} = \sqrt{x+1}-2 \wedge x \geq -1 \iff |\sqrt{x+1}-2| = \sqrt{x+1}-2 \wedge x \geq -1 \iff \sqrt{x+1} \geq 2 \wedge x \geq 1 \iff x \geq 3 \wedge x \geq -1 \iff x \geq 3$. в) $x \in [2,+\infty)$.

379. а) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$; в) смена $\sqrt{x-2} = t$, $x = 6$; г) смена $\sqrt{2x-5} = t$, $x_1 = 15$.

380. Једначина нема смисла за $x = p$, $x = q$. За $x \neq p$, $x \neq q$, дата једначина еквивалентна је са

$$\frac{x-q}{x-p}-\frac{x-p}{x-q} = \frac{4pq}{p^2-q^2}.$$

Заменом $\frac{x-q}{x-p} = t$, добијамо $t-\frac{1}{t} = \frac{4pq}{p^2-q^2}$, односно $(p^2-q^2)t^2-4pqt-p^2+q^2 = 0$, за $p \neq q$. Решења добијене једначине су $t_1 = \frac{q-p}{p+q}$, $t_2 = \frac{p+q}{p-q}$, па је

$$\frac{x-q}{x-p} = \frac{q-p}{p+q} \iff x = \frac{p^2+q^2}{2p} \wedge p \neq 0,$$
$$\frac{x-q}{x-p} = \frac{p+q}{p-q} \iff x = \frac{p^2+q^2}{2q} \wedge q \neq 0.$$

Закључујемо да су решења: за $|p| \neq |q|$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ — $x_1 = \frac{p^2+q^2}{2p}$, $x_2 = \frac{p^2+q^2}{2q}$; за $p = 0$, $q \neq 0$ — $x_1 = \frac{q}{2}$; за $p \neq 0$, $q = 0$ — $x_1 = \frac{p}{2}$; за $|p| = |q|$ — нема решења.

381. Једначина има смисла за $n \neq 0$, $nx \neq 2$. После трансформација за $n \neq 0$ и $nx \neq 2$ једначина се своди на $(1-n)x^2+2x+n+1 = 0$ чија су решења $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{n+1}{n-1}$. Ако је $n = -2$ једначина има јединствено решење $x_1 = \frac{1}{3}$. Ако је $n = 1$ једначина има јединствено решење $x_1 = -1$. За остале вредности n једначина има два решења $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{n+1}{n-1}$.

382. $(a^2-5a+6)x=a-3 \iff (a-2)(a-3)x=a-3$. 1° Ако је $a=3$, онда је сваки реалан број x решење једначине. 2 Ако је $a=2$, онда једначина нема решења. 3° Ако је $a \neq 2$ и $a \neq 3$, онда је $x_1=\dfrac{1}{a-2}$ једино решење једначине.

383. а) Размотримо посебно леву и десну страну дате једначине. Нуле тринома под знаком апсолутне вредности на левој страни су $x_1=3$, $x_2=-1$. Према томе он је позитиван за $x \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ и негативан за $x \in (-1,3)$. Дискриминанта тринома под апсолутном вредношћу на десној страни $D=-16<0$, па је трином позитиван за свако x.

1° За $x \in (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$ је $x^2-2x-3 \geq 0$ па имамо $x^2-2x-3=x^2-2x+5$, односно $-3=5$ што је немогуће. Једначина нема решења.

2° За $x \in (1,3)$ је $x^2-2x-3<0$, па имамо $-(x^2-2x-3)=x^2-2x+5$, односно $(x-1)^2=0$, одакле је $x=1$. Према томе једначина има јединствено решење $x_1=1$.

б) $x \leq -3$ или $x \geq 2$; в) $\dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$; г) $x \leq -1$ или $x \geq 0$.

384. 1° У датој једначини, према Виетовим формулама је $x_1x_2=1$, тј. $x_1=\dfrac{1}{x_2}$, па закључујемо да је тражена једначина идентична датој једначини. 2° Решења су реална ако је $b^2-4 \geq 0$, односно за $b \leq -2$ или $b \geq 2$.

385. На основу Виетових релација је

$$x_1+x_2=1-a, \qquad x_1x_2=\frac{1}{6}(2a^2-5a).$$

Даље је

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3 &= (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)\\ &=(1-a)\left((1-a)^2-\frac{1}{2}(2a^2-5a)\right)=(1-a)\left(\frac{a}{2}+1\right). \end{aligned}$$

Како је $(1-a)\left(\dfrac{a}{2}+1\right)=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}a+1$, то је $x_1^3+x_2^3$ највеће за $a=-\dfrac{1}{2}$.

386. 1° За $a \leq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $a \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 2° $2x_1x_2-3(x_1+x_2)+2=0$, 3° $x_1=x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_1'=x_2'=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, 4° $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=-\dfrac{3}{4}$.

387. Користимо Виетове формуле: t_1 и t_2 су решења квадратне једначине $t^2+at+b=0$ ако и само ако је $t_1+t_2=-a$ и $t_1t_2=b$. Дакле,

$$p^2=(x_1+1)+(x_2+1)=(x_1+x_2)+2=-p+2.$$

Одатле $p=1$ или $p=-2$. Такође је и

$$pq=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=q-p+1.$$

Замењујући добијене вредности за p у једначину $pq=q-p+1$ закључујемо да су тражене вредности за p и q: $p=1$, q произвољно; или $p=-2$, $q=-1$.

Напомена. Ако је $p=1$ и $4q>1$ једначина $x^2+px+q=0$ има решења која нису реална. То не утиче на одговор на питање постављено у задатку.

388. а) Дискриминанта једначине је $D=(k+2)^2-8k=(k-2)^2 \geq 0$.

б) $f(x-k)-2x=x^2-kx$. За $k=7$ решења једначине $f(x-k)-2x=0$ су $x=0$ или $x=7$. Функција $y=f(x-7)-2x=x^2-7x$ има минимум

$$y_{\min}=-\frac{49}{4} \qquad \text{за} \quad x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7}{2}.$$

389. Нека је $x_1=x_2$. Како је

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2},$$

онда важи: $x_1=x_2$ ако је $b^2-4ac=0$. Претпоставимо обрнуто да је $b^2-4ac=0$. Тада је $c=\dfrac{b^2}{4a}$, па се добија једначина $ax^2+bx+\dfrac{b^2}{4a}=0$, односно $(2ax+b)^2=0$, која има двоструко решење $x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$ па важи: $b^2-4ac=0$ ако је $x_1=x_2$.

390. 1° $m_{1,2}=1 \pm \sqrt{k-9}$; 2° $k \geq 9$. 3° Једној вредности $k \geq 9$ одговарају две реалне вредности m, за које је $m_1+m_2=2$. Из дате једначине и $m_1+m_2=2$ следи дата релација.

391. Претпоставимо да квадратна једначина $t^2+pt+q=0$ има решења

$$t_1=x_2-x_1, \quad t_2=\frac{1}{x_2-x_1}, \qquad x_1<x_2.$$

Тада је по Виетовим формулама

$$q=t_1t_2=1, \qquad p=-(t_1+t_2)=-\frac{(x_2-x_1)^2+1}{x_2-x_1}.$$

Из $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(m+1)^2-4m=(m-1)^2$ следи

$$x_2-x_1=\begin{cases} m-1, & m>1,\\ 1-m, & m<1.\end{cases} \quad \text{па је} \quad p=\begin{cases} \dfrac{(m-1)^2+1}{m-1}, & m>1,\\ \dfrac{(m-1)^2+1}{1-m}, & m<1.\end{cases}$$

Према томе добијају се две једначине, и то:

1° $(m-1)t^2+((m-1)^2+1)t+m-1=0$ за $m>1$;
2° $(1-m)t^2+((m-1)^2+1)t+1-m=0$ за $m<1$.

392. $p=-4$, $q=29$ и $x_2=2-5i$.

393. Тражена једначина је $x^2-Sx+P=0$. Према услову једначина је:

$$\begin{aligned} S&=m+n=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q,\\ P&=mn=x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=q^2. \end{aligned}$$

Тражена једначина је $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$.

394. Ако су x_1 и x_2 решења дате једначине, а x_1' и x_2' решења нове квадратне једначине, тада је:

$$\begin{aligned} x_1'&=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=-p^3+3pq,\\ x_2'&=(x_1+x_2)^3=-p^3. \end{aligned}$$

Нова квадратна једначина је $x^2-(3pq-2p^3)x+p^6-3p^4q=0$.

395. $x_1 = x_2^2$ ако и само ако је $\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q^2} + p = 0$.

396. $ax^2 - (2am - b)x + am^2 - bm + c = 0$. **397.** $4y^2 - 32y + 63 = 0$.

398. $D = 4(-m^2 + 4m - 3) \geq 0$, односно $m^2 - 4m + 3 \leq 0$ за $1 \leq m \leq 3$. 1° За $m = 1$ имамо $x^2 + 2x + 1 = 0$, тј. $x = -1$. 2° За $m = 2$ је $x + 2 = 0$, тј. $x = -2$. 3° За $m = 3$ је $x^2 + 6x + 9 = 0$, тј. $x = -3$.

399. а) Из $x_1 + x_2 = 1 - 3a$ и $a = x_1x_2$ добијамо $x_1 + x_2 = 1 - 3x_1x_2$, одакле је $x_1 = \dfrac{1 - x_2}{1 + 3x_2}$ и обрнуто $x_2 = \dfrac{1 - x_1}{1 + 3x_1}$.

б) Из $x_1 > 0$, односно $\dfrac{1 - x_2}{1 + 3x_2} > 0$ добијамо $x_2 \in (-1/3, 1)$. Слично, ако је $x_2 > 0$, онда је $x_1 \in (-1/3, 1)$.

в) Мора бити $x_1 = 6x_2$ или $x_1 = -6x_2$. Из $x_1 = 6x_2$ и $x_1 + x_2 = 1 - 3x_1x_2$ добијамо: $18x_2^2 + 7x_2 - 1 = 0$, па је $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ или $x_2 = \dfrac{1}{9}$, а самим тим $x_1 = -3$ или $x_1 = \dfrac{2}{3}$. Из $x_1 = -6x_2$ добијамо: $18x^2 + 5x_2 + 1 = 0$, а ова једначина нема реалних решења.

400. Дискриминанта дате једначине је позитивна за $m < -1$ или $m > 4$. Нека је $f(x) = x^2 - 2(m - 1)x + m + 5$. Тада је $f(-2)f(3) < 0$ за те вредности параметра m, па $f(x)$ има тачно једну нулу у интервалу $(-2, 3)$.

401. Корени једначине су $x_1 = \dfrac{k}{2} + 1$, $x_2 = \dfrac{k}{2} - 1$. Резултат: $-4 < k < 6$.

402. Нека је $f(x) = (a+1)x^2 - (a^2+a+6)x + 6a$. Тачно један корен дате једначине припада интервалу $(0, 1)$ ако и само ако је $f(0)f(1) < 0$. Како је $f(0)f(1) = 6a(-a^2 + 6a - 5) < 0$, то је $0 < a < 1$ или $a > 5$.

403. 1° $(\forall x \in \mathbf{R})(f(x) > 1) \iff (\forall x \in \mathbf{R})\left(3x^2 - 5x + k^2 - 3k + \dfrac{37}{12} > 0\right) \iff$ $25 - 4 \cdot 3\left(k^2 - 3k + \dfrac{37}{12}\right) < 0 \iff k^2 - 3k + 1 > 0 \iff k < \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee k > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

2° Квадратни трином $ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ достиже минимум за $x = -\dfrac{b}{2a}$. Дакле $f(x)$ достиже минимум за $x = \dfrac{5}{6}$.

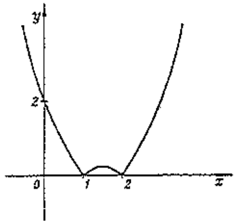
3° Потребно је одредити за које k је $f\left(\dfrac{5}{6}\right) = 0$. Међутим $f\left(\dfrac{5}{6}\right) = k^2 - 3k + 2$, па је минимална вредност функције једнака нули за $k_1 = 1$ или $k_2 = 2$.

404. $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11$.

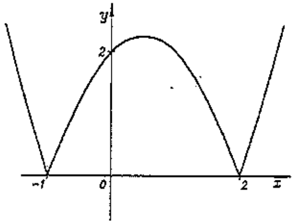
405. Нека је основица правоугаоника x, а висина y. Тада је $\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{x}{2}\right) : \dfrac{a}{2} = y : h$, тј. $x = \dfrac{a(h - y)}{h}$. Површина правоугаоника је $P = xy = \dfrac{a}{h}y(h - y)$. Свој максимум функција $P(y) = \dfrac{-a}{h}y^2 + ay$ достиже за $y = \dfrac{h}{2}$.

406. $E = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5 - x}$. Најмања вредност израза E је 0,8 за $x = 2{,}5$, када је вредност израза $x(5 - x)$ максимална.

407. а) $|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{за } x \leq 1 \text{ или } x \geq 2, \\ -x^2 + 3x - 2, & \text{за } 1 < x < 2 \text{ (сл. 25)}. \end{cases}$



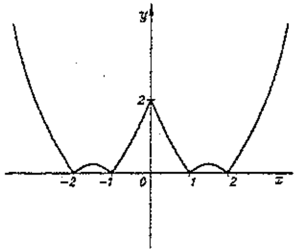
Сл. 25



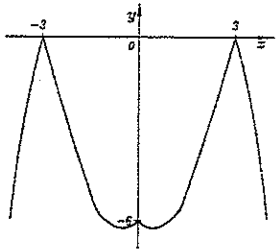
Сл. 26

б) $|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & \text{за } x \leq -1 \text{ или } x \geq 2, \\ -x^2 + x + 2, & \text{за } -1 < x < 2 \text{ (сл. 26)}. \end{cases}$

в) $|x^2 - 3\,|x| + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{за } 0 \leq x \leq 1 \text{ или } x \leq 2, \\ -x^2 + 3x - 2, & \text{за } 1 < x < 2, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{за } x < -2 \text{ или } -1 \leq x \leq 0, \\ -x^2 - 3x - 2, & \text{за } -2 < x < -1 \text{ (сл. 27)}. \end{cases}$



Сл. 27



Сл. 28

г) $-|x^2 - |x| - 6| = \begin{cases} -x^2 + x + 6, & \text{за } x \geq 3, \\ x^2 - x - 6, & \text{за } 0 \leq x < 3, \\ -x^2 - x - 6, & \text{за } x \leq -3, \\ x^2 + x - 6, & \text{за } -3 < x \leq 0 \text{ (сл. 28)}. \end{cases}$

408. $m(x^2 + 2x) + 2x - y + 4 = 0$. Из $x^2 + 2x = 0$ имамо $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, па се из $2x - y + 4 = 0$ добија $y_1 = 4$, $y_2 = 0$. Тачке су $A(0, 4)$ и $B(-2, 0)$.

409. а) Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + px + q = 0$, тада је: $2 - \sqrt{3} + x_2 = -p$ и $(2 - \sqrt{3})x_2 = q$. Из ових једнакости закључујемо да мора бити $(p + 4)\sqrt{3} - 2p - q - 7 = 0$. Како су p и q рационални бројеви, ова је релација могућа само ако је $p + 4 = 0$, па је и $2p + q + 7 = 0$, одакле је $p = -4$ и $q = 1$. Дата једначина сада гласи

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = 2 - \sqrt{3} \vee x = 2 + \sqrt{3}; \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

б) $p = -8$, $q = 13$ и $x_2 = 4 + \sqrt{3}$; в) $p = -2$, $q = -2$ и $x_2 = 1 - \sqrt{3}$; г) $p = 0$, $q = 1$, $x_2 = i$.

410. Из $D_1 + D_2 = (b^2 - 4c) + (p^2 - 4q) = (b - p)^2 \geq 0$ закључујемо да је бар једна од дискриминанти ненегативна.

411. Нека су $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$ нуле дате функције. Тада се она може написати у облику $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Упоређивањем добијамо $x_1 + x_2 = a + 3$, $x_1x_2 = 3a + 3$, а одавде елиминисањем броја a следи $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 3$. Бројеви $x_1 - 3$, $x_2 - 3$ су цели па имамо две могућности:

1° $x_1 - 3 = 1$, $x_2 - 3 = 3$, тј. $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ па је $a = x_1 + x_2 - 3 = 7$.

2° $x_1 - 3 = -3$, $x_2 - 3 = -1$, тј. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ па је $a = -1$.

412. Довољно је показати да је, уз дати услов, дискриминанта квадрат рационалног броја. Имамо

$$D = p^2 - 4q = \left(mq + \frac{1}{m}\right)^2 - 4q = \left(mq - \frac{1}{m}\right)^2.$$

413. Крајеви датог интервала су нуле функције. Из једначина $16 - 4(m+n) + m - n = 0$ и $4 + 2(m+n) + m - n = 0$ добијамо $m = -3$, $n = 5$.

414. Из $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1^2 - a_1c_1 < 0$, $b_2^2 - a_2c_2 < 0$ следи $a_1a_2 > 0$, $(b_1b_2)^2 - a_1a_2c_1c_2 < 0$.

415. а) Из $2xa^2 + (x^2 + 2)a - x^3 + 2x = 0$, за $x \neq 0$, добијамо $a_1 = \dfrac{x^2 - 2}{2x}$, $a_2 = -x$, па је $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 2}$, $x_3 = -a$. Ако је $a = 0$, једначина гласи $x^3 - 2x = 0$, што је еквивалентно са $x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$.

б) Из $a_1 = x - x^2$, $a_2 = x^2 + x + 1$, добијамо $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$.

416. а) Дата неједначина може се написати као систем неједначина

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \geq -1, \qquad \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1.$$

Решења дате неједначине су $\{x \mid (0 \leq x \leq 8/5) \vee (x \geq 5/2)\}$; б) $x \leq \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$;

в) $x \leq \dfrac{3}{2} \vee 2 < x < 3 \vee 3 < x < +\infty$; г) $-1 < x < \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4} \vee \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4} < x < 3 \vee x > 3$.

417. *Први начин.* Неједначина $2x^2 + px - 5 > 0$ има решења

$$x > \frac{-p + \sqrt{p^2 + 40}}{4} \quad \text{или} \quad x < \frac{-p - \sqrt{p^2 + 40}}{4}.$$

Бар једно решење је у интервалу $(-1, 1)$ ако и само ако је

$$1 > \frac{-p + \sqrt{p^2 + 40}}{4} \quad \text{или} \quad -1 < \frac{-p - \sqrt{p^2 + 40}}{4}. \tag{1}$$

Решавамо прву неједначину: $4 > -p + \sqrt{p^2 + 40} \iff p + 4 > \sqrt{p^2 + 40} \iff p + 4 > 0 \wedge (p + 4)^2 > p^2 + 40 \iff p > -4 \wedge p > 3 \iff p > 3$. Слично се решава и друга неједначина из (1), па се тако налази коначно решење задатка:

$$p > 3 \quad \text{или} \quad p < -3. \tag{2}$$

Други начин. Нека је $f(x) = 2x^2 - px - 5$. Лако се види, ако је

$$f(1) > 0 \quad \text{или} \quad f(-1) > 0, \tag{3}$$

онда неједначина $f(x) < 0$ има бар једно решење у интервалу $(-1, 1)$, а ако (3) није тачно, тј. ако је $f(1) \leq 0$ и $f(-1) \leq 0$, онда је, за свако x из интервала $(-1, 1)$, $f(x) \leq 0$. Међутим (3) је, очигледно, еквивалентно са (2).

418. Сменом $x = zy$ дати систем се своди на

$$y^3(z^3 + 1) = 1, \qquad y^3(z^3 + 2z + 1) = 2.$$

Деобом датих једначина, добијамо и ($y \neq 0$):

$$\frac{z^3 + 1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{1}{2}, \qquad z \neq -1,$$

односно $\dfrac{z^2 - z + 1}{z + 1} = \dfrac{1}{2}$, одакле је $2z^2 - 3z + 1 = 0$. Решења задатог система су: $\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$.

419.

$$\begin{aligned} & (1 + x)^{2/3} + 4(1 - x)^{2/3} - 5(1 + x)^{1/3}(1 - x)^{1/3} = 0 \\ \iff & [(1 + x)^{1/3} - (1 - x)^{1/3}] \cdot [(1 + x)^{1/3} - 4(1 - x)^{1/3}] = 0 \\ \iff & (1 + x = 1 - x) \vee (1 + x = 64(1 - x)) \\ \iff & x = 0 \vee x = 63/65. \end{aligned}$$

420. а) Дата једначина се може написати у облику

$$t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}, \qquad \frac{x + 3}{5x + 2} = t^3.$$

Прва једначина се своди на квадратну једначину $6t^2 - 13t + 6 = 0$, чија су решења $t_1 = \dfrac{2}{3}$, $t_2 = \dfrac{3}{2}$. Из друге једначине следи $x = \dfrac{3 - 2t^3}{5t^3 - 1}$. Замењујући добијене вредности t, добијамо решења дате једначине $x_1 = 5$, $x_2 = -\dfrac{30}{127}$. б) $x_1 = -8$, $x_2 = 27$.

421. Ако уведемо смену $x + \dfrac{1}{x} = t$, добија се квадратна једначина $t^2 + 2t + m - 2 = 0$ чија су решења $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 - m}$. Да би решења (по x) била реална треба да буде $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$, тј. $-1 - \sqrt{3 - m} < -2$ и $-1 + \sqrt{3 + m} > 2$, одакле се налази $m < -6$.

422. Нека су цели бројеви x_1 и x_2 решења дате једначине. Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = p$, $x_1x_2 = q$. С обзиром да је прост број сваки природни број већи од јединице чији су делиоци само јединица и он сам, то ће једно решење бити 1 а друго q. Нека је $x_1 = 1$, $x_2 = q$, тада је $p = q + 1$; број q не може бити непаран, јер ако би био непаран тада би p био сложен број. Према томе, q је паран број. Једини паран прост број је 2. Дакле $q = 2$, а $p = 3$.

423. Дата једначина еквивалентна је са једначином

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0.$$

Како је дискриминанта ове једначине

$$D = 4[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)] = 2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0,$$

решења дате једначине су реална.

424. б) *Први начин*:

$$\begin{aligned} & d \text{ је „добар“ број} \\ \iff & (\forall x \in \mathbf{R})\left(\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \le d\right) \\ \iff & (\forall x \in \mathbf{R})(2x^2+2x+3 \le d(x^2+x+1)) \\ \iff & (\forall x \in \mathbf{R})((d-2)x^2+(d-2)x+(d-3) \ge 0) \\ \iff & d-2>0 \wedge (d-2)^2-4(d-2)(d-3) \le 0 \\ \iff & d-2>0 \wedge (d-2)(10-3d) \le 0 \\ \iff & d>2 \wedge 3d \ge 10 \\ \iff & d \ge \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Други начин. Број d је „добар“ број ако и само ако је $d \ge m$, где је m највећа вредност функције

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Међутим, $f(x)$ има највећу вредност кад x^2+x+1 има најмању вредност, а то је за $x = -\frac{1}{2}$ (минимум квадратне функције!). Дакле, d је „добар“ ако и само ако $d \ge f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$.

425. 1° $\dfrac{1+x_1}{1-x_1} + \dfrac{1+x_2}{1-x_2} = \dfrac{2(1-x_1x_2)}{1+x_1x_2-(x_1+x_2)} = \dfrac{2\left(1-\frac{c}{a}\right)}{1+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}} = \dfrac{2(a-c)}{a+b+c}$.

2° Нека је $k(x) > 0 \iff 1 < x < 3$. Тада су 1 и 3 нуле тринома $k(x)$, па је $k(x) = a(x-1)(x-3) = ax^2-4ax+3a$. Коефицијент a је негативан јер је, за $1 < x < 3$, производ $(x-1)(x-3)$ такође негативан.

3° Неједнакост $ax^2-bx+c>0$ се своди на $ax^2+4ax+3a>0$, односно (због $a<0$) на $x^2+4x+3<0$. Последња неједнакост је испуњена за $-3<x<-1$.

426. $y = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 4$; y је најмање за $m=1$, $y>0$ за $m < 1-\sqrt{17}$ или $m > 1+\sqrt{17}$.

427. 1° Да би квадратни трином ax^2+bx+c имао негативну вредност за свако x, потребно је и довољно да је $a<0$ и $b^2-4ac<0$. За трином $k(x)$ ови услови се своде на $p<2$ и $p^2-(p-2)(2p-3)<0$. Како је

$$p^2-(p-2)(2p-3) = -p^2+7p-6 < 0 \iff p<1 \vee p>6,$$

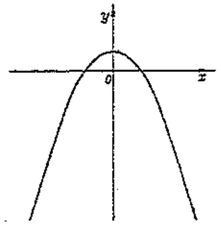
за $p<1$ биће $k(x)<0$, без обзира на вредност x.

2° Нека су α и β решења квадратне једначине $k(x)=0$. Тада је $\alpha+\beta = \frac{2p}{p-2}$ и $\alpha\beta = \frac{2p-3}{p-2}$, па је

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\dfrac{4p^2}{(p-2)^2}-\dfrac{2(2p-3)}{p-2}}{\dfrac{(2p-3)^2}{(p-2)^2}} = \frac{14p-12}{4p^2-12p+9}.$$

Тражене вредности за p сада добијамо из једначине $\frac{14p-12}{4p^2-12p+9} = 2$, а оне су $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{15}{4}$.

417. а) $f(x) > g(x) \iff f(x)-g(x) > 0 \iff -kx^2+(1-k)x-2k = h(x) > 0$. Да би квадратни трином ax^2+bx+c имао позитивну вредност за свако x, потребно је и довољно да је $a>0$ и $b^2-4ac<0$. За трином $h(x)$ ови услови се своде на $-k>0$ и $D=(1-k)^2-8k^2<0$, односно $k>0$ и $-7k^2-2k+1<0$. Како је $-7k^2-2k+1<0$ за $x \in \left(-\infty, \frac{1-2\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{-1+2\sqrt{2}}{7}, \infty\right)$ (сл. 26), без обзира на вредност x, биће $h(x)>0$ за $k \in \left(-\infty, \frac{-1-2\sqrt{2}}{7}\right)$. б) $F(k) = 2f(k-1)+g(-1) = 8k^2+6k+1$. $\min F(k) = F(-3/8) = -1/8$.



Сл. 26

429. Напишимо дату једначину у облику

$$\begin{aligned} & x^3+3x^2+x^2+3x+2x+x+1+1+1=0, && \text{или} \\ & (x^3+3x^2+3x+1)+(x^2+2x+1)+(x+1)=0, && \text{односно,} \\ & (x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)=0. \end{aligned}$$

Заменом $x+1=t$, добија се $t^3+t^2+t=0$, одакле је $t(t^2+t+1)=0$, одакле је $t_1=0$, $t_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решења су: $x_1=-1$, $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

430. а) Додавањем обема странама једначине израза $2x \cdot \frac{x}{x-1}$ добијамо следеће еквивалентне једначине

$$\begin{aligned} & x^2+2x\cdot\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8+2x\cdot\frac{x}{x-1} \\ \iff & \left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2x\cdot\frac{x}{x-1} = 8 \\ \iff & \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x-1} = 8. \end{aligned}$$

Сменом $\frac{x^2}{x-1} = y$ добијамо једначину $y^2-2y-8=0$, чија су решења $y_1=-2$, $y_2=4$. Решење једначина $\frac{x^2}{x-1}=4$ и $\frac{x^2}{x-1}=-2$ су $x_{1,2}=2$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

б) Ако уведемо смену $y = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$, добијамо квадратну једначину $y^2-6y+8=0$, чија су решења $y_1=2$, $y_2=4$. Једначина $\frac{x+2}{\sqrt{x}} = 2$ нема реалних решења, јер је $\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}} \ge 2\sqrt{2}$, док су решења једначине $\frac{x+2}{\sqrt{x}} = 4$ дата са $x_{1,2} = 6\pm4\sqrt{2}$.

в) Увођењем смене $y = 1-1986x^2$ добија се систем једначина $1-1986y^2=x$, $1-1986x^2=y$. Одузимањем друге једначине од прве, добија се $(x-y)(1986x+1986y-1)=0$, па у односу на x и y имамо два система

$$\begin{aligned} 1-1986y^2 &= x, \\ x-y &= 0, \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} 1-1986y^2 &= x, \\ 1986x+1986y-1 &= 0. \end{aligned}$$

Решења првог система су: $\left(\frac{-1\pm\sqrt{7945}}{3972}, \frac{-1\pm\sqrt{7945}}{3972}\right)$, а другог $\left(\frac{1\pm\sqrt{7941}}{3972}, \frac{1\pm\sqrt{7941}}{3972}\right)$. Према томе, решења једначине су: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{7945}}{3972}$, $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{7941}}{3972}$.

431. Претпоставимо да једначина има јединствено решење x_0. Тада је и број $-x_0$ решења, па мора бити $x_0 = 0$. Одавде следи да мора да буде и $a = 0$; дакле имамо једначину $x^2 - |x| = 0$. Она, међутим, има три решења $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Закључујемо да није могуће одредити број a тако да дата једначина има јединствено решење.

432. а) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = \left(\frac{-b+c+a}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\cdot\frac{-b+c+a}{a}$.

б) Ако релације $|b-c| < a$, $|c-a| < b$, $|a-b| < c$ квадрирамо и саберемо добићемо неједнакост $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$, из које се добија да је дискриминанта квадратног тринома мања од нуле.

433. Ако би корени били рационални, морало би да буде $q^2 - 4pr = k^2$, $k \in \mathbf{Z}$. Како је q непаран број, то мора бити и k^2, а према томе је и k непаран. Из $4pr = k^2 - q^2$ следи да је $4pr$ дељиво са 8, јер квадрати непарних бројева k и q при дељењу са 8 дају остатак 1. Међутим, бројеви p и r су непарни, па је немогуће да $4pr$ буде дељив са 8.

434. Лако се проверава да су корени једначине $ax^2+(1-a^2)x-a = 0$ реални и различити. Услов наведен у задатку еквивалентан је услову да ова једначина има оба корена по апсолутној вредности ≤ 2. Како су ти корени $x_1 = a$, $x_2 = -1/a$, то је наведени услов испуњен ако и само ако је $-2 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ (за $a \geq 0$ увек постоје реалне вредности x са произвољно великом апсулутном вредношћу која задовољава дату једначину).

435. *Први начин.* Како је $f(1) = a+b+c = 1 > 0$, то је за свако x, $f(x) > 0$ па је и $f(0) = c > 0$.

Други начин. Из $b^2 < 4ac$ и $a = 1-b-c$ имамо $b^2 < 4c-4bc-4c^2$, одакле је $(b+2c)^2 < 4c$, па је $4c > 0$ и $c > 0$.

436. Корени друге једначине су рационални, јер је њена дискриминанта потпун квадрат $D = \alpha^2 + 4\beta = \alpha^2 + 4(1-\alpha) = (\alpha-2)^2$. Релација $\beta = 1-\alpha$ је последица Виетових формула (из прве једначине).

437. Нека је $p(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$. Како је $ar^2 + br + c = 0$ и $-as^2 + bs + c = 0$, то је $br + c = -ar^2$ и $bs + c = as^2$, па је

$$\begin{aligned} p(r)p(s) &= \left(\frac{a}{2}r^2 + br + c\right)\left(\frac{a}{2}s^2 + bs + c\right) = \left(\frac{a}{2}r^2 - ar^2\right)\left(\frac{a}{2}s^2 + as^2\right) \\ &= -\frac{a}{2}r^2 \cdot \frac{3a}{2}s^2 = \frac{-3a^2r^2s^2}{4}. \end{aligned}$$

Дакле $p(r)p(s) \leq 0$, па један корен полинома $p(x)$ припада интервалу $[r,s]$.

438. Ако је $f(x) = ax^2+bx+c$, тада је $f(0) = c$, $f(1) = a+b+c$ и $f(2) = 4a+2b+c$. Због услова $5a+3b+3c = 0$, добијамо $f(0)+f(1)+f(2) = 0$. Ако је неки од бројева $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ једнак нули, очигледно је да једначина има решења у интервалу $[0,2]$. У случају да су сви бројеви $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ различити од нуле, два од тих бројева имају различит знак, на пример $f(0)f(1) < 0$. Но тада постоји број x_0, такав да важи $0 \leq x_0 < 1$ и $f(x_0) = 0$. Аналогно се разматрају остали случајеви.

439. а) Дати скуп се може представити у облику $m(x^2+2x) - x^2 + 4 - y = 0$. Како ова релација треба да важи за све $m \in \mathbf{R}$, то треба да буде $x^2 + 2x = 0$ и $x^2 - 4 + y = 0$, одакле се добија $x_1 = -2$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $y_2 = 4$. Дакле, сталне тачке су $A(-2,0)$ и $B(0,4)$.

б) Осу Ox додирује крива $y = (x+2)^2$ (за $m = 2$), а теме у тачки B има крива $y = -x^2+4$ (за $m = 0$).

440. б) Имамо да је $(m-3)f(2) < 0$ за $3 < m < \frac{11}{3}$. в) $-1 \in (x_1, x_2)$, $x_1 < x_2$.

441. Довољно је доказати да за $|x| \leq 1$ важи $|f(2x)| \leq 7$. Биће

$$\begin{aligned} |f(2x)| &= |4ax^2 + 2bx + c| \leq |ax^2 + bx + c| + |3ax^2 + bx| \\ &= |f(x)| + |x|\cdot|3ax + b| \leq 1 + |3ax + b|. \end{aligned}$$

Функција $|3ax+b|$ највећу вредност достиже у једном од крајева интервала, па је довољно доказати да је $|3a \pm b| \leq 6$:

$$\begin{aligned} |3a + b| &= |2f(1) + f(-1) - 3f(0)| \leq 2 + 1 + 3 = 6, \\ |3a - b| &= |f(1) + 2f(-1) - 3f(0)| \leq 1 + 2 + 3 = 6. \end{aligned}$$

442. а) Како је $f(1) = a+b+c$, $f(-1) = a-b+c$, $f(0) = c$, то је $|a+b+c| \leq 1$, $|a-b+c| \leq 1$ и $|c| \leq 1$. Даље је $|2a| = |(a+b+c) + (a-b+c) - 2c| \leq |a+b+c| + |a-b+c| + 2|c| \leq 4$, па следи да је $|a| \leq 2$. б) $f(x) = 2x^2 - 1$.

443. Нека је $a > 0$. Тада је $f(x) > x$ за све x, па је и $f(f(x)) > f(x) > x$ за све $x \in \mathbf{R}$. Ако је $a < 0$, за све x биће $f(x) < x$, па је и $f(f(x)) < f(x) < x$. Значи, једначина $f(f(x)) = x$ нема реалних корена.

444. Како је $y + z = 5 - x$, $yz = 8 - x(y+z) = 8 - x(5-x)$, то су y и z корени једначине $u^2 - (5-x)u + x^2 - 5x + 8 = 0$, чија је дискриминанта $D = -3x^2 + 10x - 7 \geq 0$ за $1 \leq x \leq 7/3$. На исти начин се доказује да су бројеви y и z у интервалу $[1, 7/3]$.

446. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + c = a\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4} + b\frac{x_1+x_2}{2} + c = a\frac{2x_1^2+2x_2^2-(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)}{4} + b\frac{x_1+x_2}{2} + c \leq a\frac{x_1^2+x_2^2}{2} + b\frac{x_1+x_2}{2} + c = \frac{1}{2}[(ax_1^2 + bx_1 + c) + (ax_2^2 + bx_2 + c)] = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

447. Нека су x_1 и x_2 корени функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $0 < x_1 < x_2 < 1$. Тада је $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$. Како су $f(0)$ и $f(1)$ природни бројеви и $x_1 \neq x_2$, то је

$$1 \leq f(0)f(1) = a^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) < a^2\left(\frac{x_1+x_2+1-x_1+1-x_2}{4}\right)^4 = \frac{a^2}{16},$$

па је $a^2 > 16$ и због $a \in \mathbf{N}$, $a \geq 5$. Лако се проверава да једначина $5x^2 - 5x + 1 = 0$ има две различите нуле у интервалу $(0,1)$.

448. а) Ако означимо $y = f(x)$, можемо добити квадратну једначину $x^2(y-1) + x(-4y+5) + 3y - 7 = 0$. Њена дискриминанта је $D = 4y^2 - 3$ и важи $D \geq 0$ за $|y| \geq \sqrt{3}/2$. Дакле, скуп вредности функције $f(x)$ је $(-\infty, -\sqrt{3}/2) \cup (\sqrt{3}/2, +\infty)$.

б) $\left(-\infty, \frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right) \cup \left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}, +\infty\right)$.

449. Уведимо смену $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$. Због $xy \neq 0$ имамо да је $xy > 0$ и тада је $t \geq 2$ или $xy < 0$ и тада је $t < 0$, па и $t < 1$. Дакле, неједнакост је еквивалентна са $t^2 - 2 - 3t + 4 \geq 0$, тј. $t^2 - 3t + 2 \geq 0$, тј. $t \leq 1$ или $t \geq 2$. Једнакост важи ако и само ако је $t = 2$, тј. $x = y$.

451. $D = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0$.

452. Нуле функције су реални бројеви ако и само ако је $D = 1 - 4q \geq 0$, односно $q \leq 1/4$.

а) Нека је $x_1 < x_2 < q$. Тада q одређујемо из неједначине $\frac{-1+\sqrt{1-4q}}{2} < q$, односно $\sqrt{1-4q} < 2q+1$. Лева страна неједнакости је позитивна, па мора бити позитивна и десна страна, па је $q > -\frac{1}{2}$. Квадрирањем и сређивањем неједнакости добијамо квадратну неједначину $4q^2 + 8q > 0$ са скупом решења $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Коначно из $q \leq \frac{1}{4}$, $q > -\frac{1}{2}$ и $q \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, добијамо $q \in (0, 1/4]$. б) $q \in (-\infty, -2)$.

453. Ако дату функцију напишемо у облику

$$f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2,$$

следи да је минимум за $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

454. Потребно је да дискриминанта функције буде једнака нули. Из $D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 - 4(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) = 0$ следи $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0$. Последња једнакост је тачна ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

455. 1° Ако је a променљива, а b и c константе, тада је $x = -\frac{b}{2a}$, односно $a = -\frac{b}{2x}$, $x \neq 0$. Када се $a = -\frac{b}{2x}$ замени у $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, добија се $y = \frac{b}{2}x + c$, па је геометријско место тачака права, сем тачке $(0, c)$.

2° Ако је b променљива,. a и c константе, геометријско место тачака је парабола $y = -ax^2 + c$.

3° Ако је c променљива, a и b константе, геометријско место тачака је права $y = -\frac{b}{2a}$.

456. а) $(2, 1)$; б) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$; в) $\left(\frac{2}{7}, -\frac{9}{7}\right)$, $(1, 3)$;
г) $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$; д) $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$;
ђ) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$. *Упутство.* Сабрати леве и десне стране све три једначине и израчунати $x + y + z$.

457. Из $x^2 + y^2 + 2x \leq 1$ и $x - y + a = 0$ добијамо неједначину

$$2x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 \leq 0$$

која ће имати јединствено решење ако је дискриминанта $D = 0$, односно $a^2 - 2a - 3 = 0$, одакле је $a_1 = -1$, $a_2 = 3$. За $a = 3$ добија се једначина $x^2 + 4x + 4 = 0$, што је еквивалентно са $x = -2$, па је јединствено решење $x = -2$, $y = 1$. За $a = -1$ јединствено решење је $x = 0$, $y = -1$. **458.** $x_1 = 6$, $x_2 = -37$.

459. а) Смена $\sqrt[12]{x} = z$; $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[7]{1296}$. б) Смена $\sqrt{x+1} = z$; $x_1 = 3$, $x_2 = 440$. в) Смена $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = z$; $x_1 = -9/2$, $x_2 = 3$. г) Смена $x^3 = z$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

460. а) Једначина је еквивалентна са

$$(2x-1)^2 + (y+1)^2 + 2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)} = 0 \qquad \text{тј.}$$
$$2x - 1 = y + 1 = (y+2)(4x^2+y) = 0.$$

Решење је $(1/2, -1)$.

б) Једначина је еквивалентна са

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{(x^2+x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0, \quad \text{тј.} \quad x - \frac{1}{x} = x^2 + x = 0.$$

Једино решење је $x_1 = -1$.

в) Једначина је еквивалентна систему

$$\left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}, \; x \geq 1, \quad \text{тј.} \quad x^2 - x - 1 = 0, \; x \geq 1.$$

Једино решење је $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

г) Увођењем смене $\frac{12}{x^2} = t$, добијамо једначину

$$\sqrt{\frac{12}{t} - t} = \frac{12}{t} - \sqrt{12 - t}.$$

После квадрирања и сређивања добијамо једначину

$$t^2 - 2t\sqrt{12-t} + 12 - t = 0, \quad \text{тј.} \quad \left(t - \sqrt{12-t}\right)^2 = 0,$$

која је еквивалнтна једначини $t = \sqrt{12 - t}$. Једино решење последње једначине је $t_1 = 3$. Из $x^2 = 12/3$, добијамо решења $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

461. Дата једначина еквивалентна је једначини

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{5x+10} = \sqrt{16-4x} + \sqrt{61-4x},$$

при чему су сви изрази дефинисани за $-\frac{1}{5} \leq x \leq 4$. Уведимо ознаке $l(x) = \sqrt{5x+1} + \sqrt{5x+10}$ и $d(x) = \sqrt{16-4x} + \sqrt{61-4x}$. Тада је $l(3) = d(3) = 9$. За $-\frac{1}{5} \leq x < 3$ важи $l(x) < l(3) = d(3) < d(x)$, а за $3 < x \leq 4$ важи $l(x) > l(3) = d(3) > d(x)$. Према томе, $x_1 = 3$ је једино решење дате једначине.

462. а) Да би дата неједначина имала смисла неопходно је да буде $x \geq \frac{1}{x}$ и $1 \geq \frac{1}{x}$, тј. $-1 \leq x < 0$ или $x \geq 1$. Неједначина је екивалентна са

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}\right) > 0,$$

односно са системом $\sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $x \neq 1$. Решења сви бројеви x за које важи $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

б) Дата неједначина еквивалентна је неједначини

$$\frac{(x-3a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)} > 0.$$

Решења су: за $a=0$, $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; за $a>0$, $x \in (-\infty,-2a)\cup(-a,a)\cup(3a,+\infty)$; за $a<0$, $x \in (-\infty,3a)\cup(a,-a)\cup(-2a,+\infty)$.

463. а) Нека је $\sqrt[4]{629-x}=u$, $\sqrt[4]{77+x}=v$. Добијамо систем једначине $u^4+v^4=706$, $u+v=8$. Ако уведемо смену $u+v=s$, $uv=t$, имаћемо

$$\begin{aligned} u^4+v^4 &= (u^2+v^2)^2-2u^2v^2=((u+v)^2-2uv)^2-2u^2v^2 \\ &= (64-2t)^2-2t^2=64^2-256t+2t^2=706, \end{aligned}$$

одакле налазимо $t_1=15$, $t_2=113$. Треба још решити системе $u+v=8$, $uv=15$ и $u+v=8$, $uv=113$. Из првог система налазимо $u_1=3$, $v_1=5$, одакле је $x_1=4$, $x_2=548$. Други систем нема реалних решења.
б) Увести смене $\sqrt[5]{x^2-34x+64}=u$, $\sqrt[5]{x^2-34x+33}=v$. Решења су: $x_{1,2}=17\pm\sqrt{257}$, $x_{3,4}=17\pm\sqrt{224}$.

464. Једначина је еквивалентна једначини

$$\underbrace{\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}_{999\ \text{корена}}=y^2-x, \quad y \geq 0.$$

Након довољног броја квадрирања, добијамо да мора бити

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=m, \qquad \sqrt{x}=k$$

где су m и k цели бројеви. Дакле, мора бити: $x=k^2$, $k(k+1)=m^2$. Одавде следи да би морало бити: $k \leq m < k+1$, што је немогуће, осим за $k=m=0$. Дакле, једино целобројно решење једначине је уређени пар $(0,0)$.

465. Решења су: 1° $m<-2$ — нема решења; 2° $m=-2$, $x_1=2$; 3° $-2<m<1$, $x_1=1+\sqrt{m+3}$, $x_2=\sqrt{2-m}$; 4° $m=1$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$; 5° $1<m<2$ $x_{1,2}=1\pm\sqrt{m+3}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2-m}$; 6° $m=2$, $x_1=0$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{5}$; 7° $m>2$, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{m+3}$.

466. За $m<-2$ решење је свако x; За $m=-2$, $x \neq -\frac{1}{2}$; за $-2<m<2$, $x<x_1$ и $x>x_2$. За $m=2$, $x<-\frac{7}{4}$; за $2<m<3$, $x_2<x<x_1$, за $m \geq 3$ нема решења. Притом је $x_{1,2}=\dfrac{-m\pm\sqrt{(2+m)(3-m)}}{m-2}$.

467. Сменом $\sqrt{11-x}=u>0$, $\sqrt{x-1}=v>0$ добија се систем једначина

$$u^2+v^2=10, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{4}{5}.$$

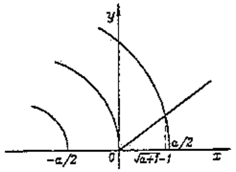
Једначина нема решења.

468. а) $x_1=\frac{7}{9}a$ за $a \neq 0$; $x \in \mathrm{R}$ за $a=0$; б) $x_1=0$.

469. а) Смена $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}=z$; $x_1=\dfrac{a-b}{2}$ за $a \neq -b$. б) За $a=0$, $x \in (-\infty,0)$; за $a \neq 0$, $x=\frac{4}{3}|a|$.

470. а) $-2<m<4$; б) $-1<m<2$.

471. а) $-2\sqrt{13} \leq x < -4$ или $2<x \leq 2\sqrt{13}$;
б) $-\infty<x \leq 0$;
в) За $a=0$, $x \in (-\infty,0)$; за $a<0$, $x \in (-\infty,a/2]$;
за $a>0$, $x \in (-\infty,\sqrt{a+1}-1)$.
Графичко решење (сл. 30);
г) $0 \leq x \leq a$ или $x \geq 16a$ за $a \geq 0$;
нема решења за $a<0$. Решити и графички.



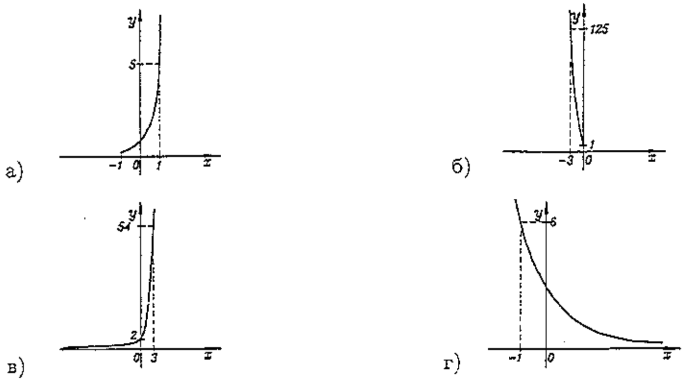
Сл. 30

472. Функција је дефинисана ако је $\dfrac{x-4}{(x-1)(x-3)} \geq 0$, а то ће бити када је $x \in (1,3)\cup[4,\infty)$.

473. *Упутство.* Посматрати график функције $y=|x^2-2x-3|$, односно $y=|x^2-5|x|+6|$.
а) $0<a<4$; б) $0<a<\frac{1}{4}$.

Глава III – Експоненцијална и логаритамска функција

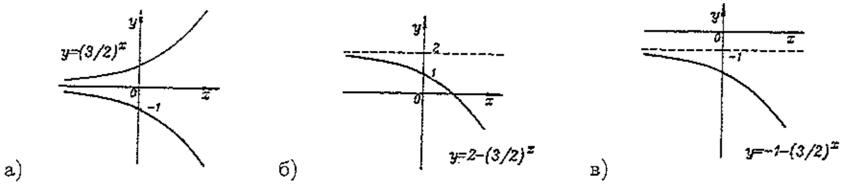
475. Видети сл. 31.



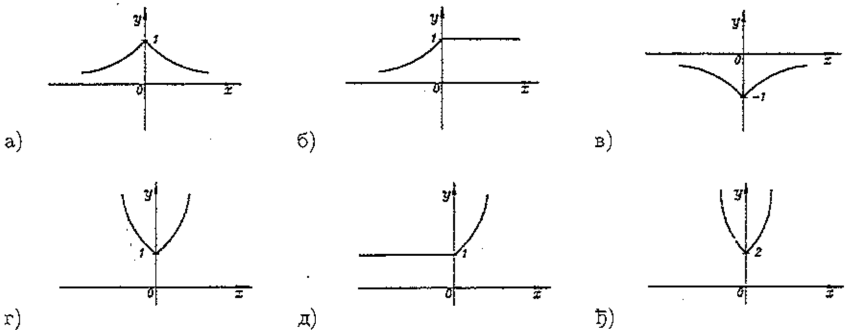
Сл. 31

476. *Упутство.* График функције облика $y=a^x\pm b$ $(a>0)$ налази се тако што се ординате графика функције $y=a^x$ повећају (смање) за b.

477. Искористити чињеницу да су графици функција $y=a^x$ и $y=-a^x$ $(a>0)$ симетрични у односу на Ox-осу; видети такође претходни задатак (сл. 32).



Сл. 32



Сл. 33

478. Видети сл. 33.

479. а) $2^x = 8$ или $2^x = 2^3$, што је еквивалентно са $x = 3$, па је једино решење дате једначине $x_1 = 3$; б) $x_1 = 5$; в) $x_1 = -2$; г) $x_2 = -\frac{2}{3}$; д) $\left(\frac{4}{5}\right)^{0,2x} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$, $x_1 = -15$; ђ) $x_1 = -\frac{4}{3}$; е) $x_1 = 7$; ж) Имамо $a^x \cdot a^{1/2} = a^{3/x}$, тј. $a^{x+1/2} = a^{3/x}$, односно $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{x}$. Решења су $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -2$; з) Имамо $2^{4/x} = 2^{3x/2}$, $\frac{4}{x} = \frac{3x}{2}$, тј. $x^2 = \frac{8}{3}$. Решења су $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$; и) Како је $0{,}125 = 2^{-3}$, то је $2^{-3} \cdot 2^{2(2x-3)} = 2^{5x/2}$, односно $-3+2(2x-3) = \frac{5}{2}x$. Решење је $x_1 = 6$; ј) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

480. а) Како је $18 = 2 \cdot 3^2$, једначина је еквивалентна једначини $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = 1$, тј. $6^{x-1} = 1$, односно $x - 1 = 0$, па је једино решење једначине $x_1 = 1$; б) $x_1 = 2$; в) $x_1 = 1$; г) $x_1 = 1$; д) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$; ђ) $x_1 = 2$.

481. а) $x_1 = 4$, $x_2 = 16$; б) $x_1 = -\frac{1}{4}$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; г) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

482. а) $4^x(4+1) = 320$; $4^x \cdot 5 = 320$; $4^x = 4^3$, па је јединствено решење $x_1 = 3$; б) $x_1 = 4$; в) $x_1 = 3$.

483. а) Ако пређемо на заједничку основу 2, добијамо

$$\frac{1}{2^3} \cdot 2^{2(2x-8)} = (2^{-2} \cdot 2^{-1/2})^{-x}, \quad \text{тј.} \quad 2^{-3+4x-16} = 2^{2,5x},$$

што је еквивалентно са $-3 + 4x - 16 = 2{,}5x$, одакле налазимо решење $x_1 = \frac{38}{3}$.

б) $x_1 = 1$; в) $x_1 = 2$; г) $x_1 = -1$; д) $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = 2$; ђ) $x_1 = \frac{2}{7}$; е) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7/2}$; ж) $x_1 = 10$; з) $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 3$.

484. а) Једначину можемо трансформисати на облик $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$. Ако уведемо смену $2^x = z > 0$, добијамо $z^2 - 10z + 16 = 0$, одакле налазимо $z_1 = 8$, $z_2 = 2$, тј. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;

б) $x_1 = 2$; в) $x_1 = 2$; г) $x_1 = 2$; д) $x_1 = 1$; ђ) $x_1 = 2$; е) $x_1 = 3$; ж) $x_{1,2} = \pm 1$; з) $x_1 = \frac{9}{4}$, $x_2 = 3$; и) нема решења; ј) $x_1 = 2$; к) $x_1 = 2$; л) $x_1 = 3$, $x_2 = 11$; љ) $x_1 = \frac{1}{2}$; м) $x_1 = \frac{5}{2}$; н) $x_1 = \frac{3}{2}$.

485. а) Поделимо обе стране једначине са 4^x: $\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0$, тј. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Ако уведемо смену $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ $(t > 0)$, добијамо једначину $t^2 + t - 2 = 0$, чија су решења $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Вредност t_1 не задовољава услов $t > 0$; према томе, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, одакле се добија једино решење једначине $x_1 = 0$;

б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; в) $x_1 = -2$; г) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; д) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

486. а) *Први начин.* Дата једначина се може написати у облику $2^{x+3}(2^{-3}+2^{-2}+2^{-1}+1) = 30$, односно $2^{x+3} = 2^4$, одакле налазимо јединствено решење једначине $x_1 = 1$. *Други начин.* Заменом $2^x = t > 0$ дата једначина се своди на: $t + 2t + 4t + 8t = 30$, односно $2^x = 2$, па је $x_1 = 1$.

б) Заменом $2^x = t > 0$ једначина се своди на $(t^2-1)(2t-1) = 0$. Решења дате једначине су $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

в) Смена $\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$. Решење $x_1 = 1$.

г) Деобом са 6^x и заменом $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ једначина се своди на $2t^2 - 5t + 3 = 0$. Решења дате једначине су $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

487. а) На левој страни једначине се испред заграде може „извући“ заједнички чинилац 5^{x-1}: $5^{x-1}(5^2-1) = 24$. Добијамо $5^{x-1} = 1$, што је еквивалентно са $x-1 = 0$, па је једино решење $x_1 = 1$; б) $x_1 = 0$; в) Једначина је еквивалентна следећој: $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$, тј. $6^x = 2^x$, односно $3^x = 1$, па је једино решење $x_1 = 0$; г) $x_1 = 3$; д) $x_1 = 0$; ђ) $x_1 = \frac{3}{2}$; е) $x_1 = -1$; ж) $x_1 = \frac{3}{2}$; з) $x_1 = \frac{1}{4}$; и) $x \in [3, +\infty) \cup \{-1/2, 1/2\}$; ј) $x_1 = -\frac{1}{2}$; к) $-\frac{1}{4}$; л) 4; љ) 3.

488. а) $(5,4)$; б) $(2,0)$; в) $(1,-1)$;

г) Због друге једначине подразумевамо да је y природан број. Степеновањем ове једначине са y добијамо $1024 = \left(\frac{2}{3}x\right)^{2y}$. Како је $x^y = 243$, $1024 = 2^{10}$, а $243 = 3^5$, добијамо

$2^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot 3^{10}$, одакле је $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y}$ и $y = 5$. Лако се одреди да је $x = 3$, па је једино решење овог система $(3, 5)$.

д) Решења су $\left(\frac{16}{81}, \frac{4}{9}\right)$, $(1, 1)$.

ђ) Како је $11^z = 21 - 2 \cdot 5^{y/2}$, $\frac{11^{xz}}{11^z} = 16 - 5^{y/2}$, то је $11^{xz} = (21 - 2 \cdot 5^{y/2})(16 - 5^{y/2})$. Заменом у прву једначину добијамо $(21 - 2u)(16 - u) - 2u^2 = 71$, где је $u = 5^{y/2}$. Одавде се налази $u = 5$, па је решење тројка $(2, 2, 1)$.

489. а) $(3, 2)$; б) $(5, -1)$ или $(5, 1)$; в) $\left(10, \frac{3}{2}\right)$ или $\left(\frac{1}{5}, 75\right)$ или $(15, 1)$; г) $(2, 3)$ или $(3, 2)$; д) скуп решења је $R = \{(1, -4), (1, 2), (2, 1), (7, -4)\}$; ђ) $(4, -\sqrt{2})$ или $(4, \sqrt{2})$.

490. а) Неједначина је еквивалентна неједначини $2^{x+2} > 2^{-2/x}$. Како је основа $2 > 1$, ова је неједначина еквивалентна са $x + 2 > -\frac{2}{x}$. Последњу неједначину задовољавају све вредности непознате x које припадају интервалу $(0, +\infty)$, па је скуп решења дате неједначине $R = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (0, +\infty)\}$.

б) Дата неједначина се може трансформисати на облик $\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}$. Како је основа $0 < \frac{4}{5} < 1$, то је последња неједначина еквивалентна са $x - 1 > 4(1 + \sqrt{x})$ (смер неједнакости се мења!). Из $x - 4\sqrt{x} - 5 > 0$ имамо $(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 1) > 0$, тј. $\sqrt{x} > 5$; дакле, решење је $x > 25$.

в) $0 < x \leq 2$; г) $0 < x < \frac{1}{2}$; д) $x \in \mathbf{R}$; ђ) $1 < x < 4$; е) $-\frac{4}{3} < x < -1$ или $1 < x < 4$.

491. а) $x \in (0, 1)$; б) $x > -2$; в) $x \leq 2$; г) $x > 0$; д) $-1 < x < 1$; ђ) $-1 < x < 1$; е) $x > 2$; ж) *Упутство.* Поделити леву и десну страну неједначине са $5^{2\sqrt{x}}$. Решење: $0 \leq x \leq 4$; з) $0 \leq x \leq 16$; и) $0 < x < 1$.

492. а) $3 < x < 3{,}5$, $x > 4$. Посматрати два случаја: $x - 3 > 1$ и $0 < x - 3 < 1$.

б) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, $-2 < x \leq -1$. Посматрати два случаја, када је $x^2 + x + 1 \geq 1$ и $0 < x^2 + x + 1 < 1$.

в) Посматрати случајеве $x < -2$ и $x > -2$. Решење је $x < -2 \vee x = 1$.

г) $x < -1$; д) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

493. а) $x = 2$; б) $x = 4$; в) $x = -1$; г) $x = 5$; д) $x = \frac{1}{2}$; ђ) $x = \frac{1}{8}$; е) $x = \frac{1}{2}$; ж) $x = \frac{1}{6}$.

494. а) 4, јер је $2^4 = 16$; б) 2, јер је $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$; в) 3, јер је $10^3 = 1000$; г) $-\frac{2}{3}$, јер је $8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{2}$, јер је $5^{1/2} = \sqrt{5}$; ђ) 4, јер је $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$; е) -2, јер је $(25)^{-2} = \frac{1}{25^2} = \frac{1}{625}$; ж) -5, јер је $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{1}{\frac{32}{243}} = \frac{243}{32}$; з) $-\frac{1}{3}$, јер је $(3^{-2})^{-1/3} = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

495. а) $\log ab$; б) $\log a^3c^2$; в) $\log a^2b^3c^4$; г) $\log \frac{a}{b^2}$; д) $\log \frac{a^2 + b^2}{c^2}$; ђ) $\log \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^3}$; е) $\log b\sqrt[3]{a}$; ж) $\log \frac{a^{2/3}b^3}{c^{2/5}}$.

496. а) $\log A = \log 2 + \log a + \log b$; б) $\log A = \log 4 + 2\log a - \log b$;

в) $\log A = \frac{1}{2}\log x - 2\log x - \log y = -\frac{3}{2}\log x - \log y$;

г) $\log A = \frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{2}\log b\right)\right)$;

д) $\log A = \frac{1}{2}\left(\log x + \frac{1}{2}\left(\log x + \log y\right)\right) - \frac{1}{3}(\log x + \log y)$.

497. а) $\log(a^2)^3 = 3\log a^2 = 6\log a$; б) $-12\log b$; в) $2\log b - 8\log c$; г) $-4\log a - 6\log b$; д) $\frac{3}{8}\log a$; ђ) $\frac{1}{2}\log a$; е) $\frac{2}{5}\log a + \frac{1}{5}\log b$; ж) $\frac{1}{4}\log a$; з) $\frac{1}{3}\log a + \frac{1}{6}\log b + \frac{1}{6}\log c$.

498. а) $\log_2 x = \log_2 ab$, односно $x = ab$; б) $x = a^3c^2$; в) $x = \frac{ab}{c}$; г) $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$; д) $x = \sqrt[n]{a\sqrt[m]{b/c}}$; ђ) $x = \frac{\sqrt[5]{(a+b)^3}}{\sqrt[7]{(a-b)^4}}$; е) $x = \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{c\sqrt{d}}}$.

499. а) $\log_8 \log_4 \log_2 16 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0$; б) $3 - \log_6 36 = 3 - 2 = 1$; в) 9; г) $4\log_a |b|$; д) 2; ђ) 2;

е) $\log_4 9 \cdot \frac{\log_5 2}{\log_5 3} = 2 \cdot \log_4 3 \log_3 2 = 2 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 4} = \frac{2\log_3 2}{2\log_3 2} = 1$; ж) $|-2| = 2$;

з) $a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\log_a b}}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$, па следи да је $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$; и) $-\frac{1}{2}$.

500. Користити особину логаритама $\log_c b = \log_c a \log_a b$.

501. а) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$; б) $\log 3 = \log \frac{21}{7} = \log 21 - \log 7$;

в) $\log 648 = \log(8 \cdot 81) = \log 8 + \log 81 = 3\log 2 + 4\log 3$;

г) $\log_9 7 = \log_9 \frac{63}{9} = \log_9 63 - \log_9 9 = \frac{1}{\log_{63} 9} - 1$;

д) $\log_5 14 = \frac{\log_{10} 14}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 7 + \log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 7 + \log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2}$.

502. а) 3; б) $343^{1-2\log_{49} 13} = 7^{3(1-\log_{7^2} 13^2)} = 7^{3\log_7 \frac{7}{13}} = 7^{\log_7 \left(\frac{7}{13}\right)^3} = \left(\frac{7}{13}\right)^3$;

в) 1; г) $\frac{20}{3}$; д) $\frac{8}{27}$.

503. а) 24; б) 22; в) $-\frac{132}{5}$; г) -8; д) $\frac{145}{36}$; ђ) $\frac{45}{11}$.

504. а) $\log_3 108 = 3 + \log_3 4 > 4$, а $\log_5 375 = 3 + \log_5 3 < 4$, дакле $\log_3 108 > \log_5 375$.

б) $\log_3 7 = \log_{1/3} \frac{1}{7}$; в) $\log_{1/3} 7 = \log_3 \frac{1}{7}$; г) $\log_3 7 > \log_{1/3} 7$.

д) Како је $\log_{20} 80 = \dfrac{\log 80}{\log 20} = \dfrac{3\log 2+1}{\log 2+1}$ и $\log_{80} 640 = \dfrac{\log 640}{\log 80} = \dfrac{6\log 2+1}{3\log 2+1}$, то је $\log_{20} 80 - \log_{80} 640 = \dfrac{\log 2(\log 8-\log 10)}{(3\log 2+1)(\log 2+1)} < 0$.

505. Имамо да је $5 = 10^{\lg 5}$, па је $5^{\lg 20} = 10^{\lg 5\cdot\lg 20}$, а како је $20 = 10^{\lg 20}$, то је $20^{\lg 5} = 10^{\lg 5\cdot\lg 20}$. Дакле $5^{\lg 20} = 20^{\lg 5}$.

506. а) $\log_6 9 = \log_6 3^2 = 2\log_6 3 = 2\log_6 \dfrac{6}{2} = 2(\log_6 6 - \log_6 2) = 2(1-k)$;

б) $\lg 125 = 3\lg 5 = 3(\lg 10 - \lg 2) = 3(1-a)$; в) $\log_5 6 = \dfrac{\lg 6}{\lg 5} = \dfrac{\lg 2+\lg 3}{\lg 10-\lg 2} = \dfrac{a+b}{1-a}$;

г) Како је $1225 = 35^2$, то је $\lg 122{,}5 = \lg 35^2 - \lg 10 = 2(\lg 5+\lg 7) - 1 = 2(a+b)-1$;

д) $\dfrac{4a}{1-a}$; ђ) $\dfrac{b}{1-a}$; е) $\dfrac{2-a}{a+b}$; ж) $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$; з) $ab+3a$; и) $\dfrac{5t-3}{6}$;

ј) Како је $\lg 2\lg 5 = a$ и $\lg 2+\lg 5 = \lg 10 = 1$, $\lg 2$ и $\lg 5$ су корени квадратне једначине $x^2 - x + a = 0$.

507. а) $\log_{1,7}\left[\dfrac{1}{2}(1 - \log_7 3)\right] = \log_{1,7}\left[\dfrac{1}{2}(\log_7 7 - \log_7 3)\right] = \log_{1,7}\left(\dfrac{1}{2}\log_7 \dfrac{7}{3}\right) = \log_{1,7}\log_7\sqrt{7/3} < \log_{1,7}\log_7 7 = \log_{1,7} 1 = 0$; према томе израз је негативан; б) негативан; в) негативан; г) позитиван.

508. а) $(\log_2 \pi)^{-1} + (\log_5 \pi)^{-1} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2$.

509. а) Услов $a^2+b^2 = 7ab$ је еквивалентан са $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab$, одакле логаритмовањем за основу c добијамо $2\log_c \dfrac{a+b}{3} = \log_c a + \log_c b$, а одавде тражену релацију.

г) Имамо $\log_{12} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 12} = \dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}$ и $\log_{24} 54 = \dfrac{\log_2 54}{\log_2 24} = \dfrac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3}$. Заменом $\log_2 3 = x$, добијамо

$$\begin{aligned} ab+5(a-b) &= \frac{1+2x}{2+x}\cdot\frac{1+3x}{3+x} + 5\left(\frac{1+2x}{2+x} - \frac{1+3x}{3+x}\right)\\ &= \frac{6x^2+5x+1+5(-x^2+1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)} = 1. \end{aligned}$$

510. По дефиницији логаритма је $b^{\log_a c} = (a^{\log_a b})^{\log_a c} = (a^{\log_a c})^{\log_a b} = c^{\log_a b}$.

511. Услови су $ab \neq 1$ и $x \neq 1$.

513. Нека је $\log_a M = \log_b N = x$. Тада је $a^x = M$ и $b^x = N$. Како је $b = a^{\log_a b}$, имамо $N = b^x = (a^{\log_a b})^x = (a^x)^{\log_a b} = M^{\log_a b}$, одакле следи $\log_a b = \log_M N$.

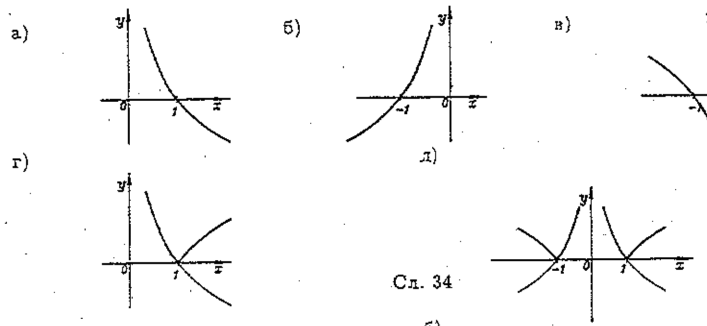
515. б) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = \dfrac{\log_N ab}{\log_N a} = \dfrac{\log_N a + \log_N b}{\log_N a} = 1 + \log_a b$.

517. $\log_2 3\log_3 4\cdots\log_n(n+1) = \dfrac{\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{\log 4}{\log 3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{\log(n+1)}{\log n} = \dfrac{\log(n+1)}{\log 2} = \log_2(n+1) = 10$, одакле $n = 2^{10}-1$.

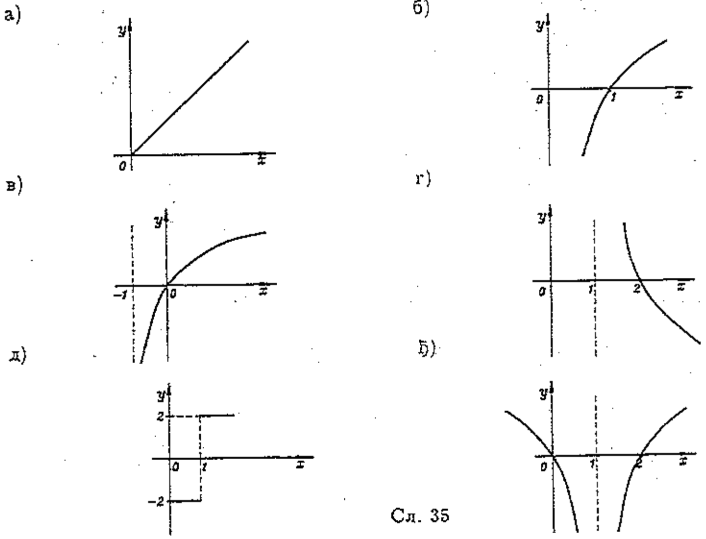
519. Како је $\log_b x = \dfrac{1}{2}(\log_a x + \log_c x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\log_b x}{\log_b a} + \dfrac{\log_b x}{\log_b c}\right)$ то је (ако поделимо са $\log_b x \neq 0$): $1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_b c}\right)$. Одавде је $2\log_b a\log_b c = \log_b c + \log_b a = \log_b ac$, па је $\log_b a \cdot \log_b c = \log_b \sqrt{ac}$. **522.** 0.

523. $-\log_3\log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n\ \text{пута}} = -\log_3\log_3 3^{1/3^n} = -\log_3\left(\dfrac{1}{3^n}\log_3 3\right) = -\log_3\dfrac{1}{3^n} = -\log_3 1 + \log_3 3^n = n$.

524. Видети сл. 34.



Сл. 34



Сл. 35

525. Видети сл. 35.

526. а) $x > \frac{5}{3}$; б) $x < 1 \lor x > 2$; в) $x < \frac{1-\sqrt{29}}{2} \lor \frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < -2 \lor 3 < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \lor x > \frac{1+\sqrt{29}}{2}$.

527. а) $x_1 = 2^4$; б) $x_1 = \frac{10}{9}$; в) $x_1 = 3$; г) $x_1 = 1+\sqrt{3}$; д) $x_1 = 4$; ђ) $x_1 = 3$.

528. а) Дата једначина еквивалентна је са $\log_3 \log_2 x = 4^0 = 1$, односно $\log_2 x = 3$ и, на крају $x = 8$. Дакле, $x_1 = 8$ је јединствено решење дате једначине; б) $x_1 = 81$; в) $x_1 = 4096$; г) $\log_4(\log_3 x) = \frac{1}{2}$, односно $\log_3 x = 2$, тј. $x = 9$.

529. а) Ако уведемо смену $\log_x \sqrt{5} = t$, $x > 0$, $x \neq 1$, добијамо квадратну једначину $2t^2 - 3t + 1 = 0$, чија су решења $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 1$. Одавде добијамо решења дате једначине $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = 5$.

б) Смена $\log_{1/3} x = t$. Решења су $x_1 = \frac{1}{3^{16}}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

в) Смена $\log_2 x = t$. Решења су $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$.

г) Смена $\log_x 2 = t$. Решења су $x_1 = 2^{-2/3}$, $x_2 = 8$.

530. а) Користећи се особинама логаритама $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ и $\log_b a = \log_{b^n} a^n$ једначину трансформишемо у еквивалентну једначину $\log_4(x+2) = \log_2 x$, односно $\log_4(x+2) = \log_4 x^2$ одакле је $x^2 - x - 2 = 0$. Решења добијене једначине су $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Дата једначина има смисла за $x > 0$, па је једино решење $x_1 = 2$.

б) Дата једначина се трансформише у $\log_{81} x^4 + \log_{81} x^2 + \log_{81} x = 7$, односно $\log_{81} x^7 = 7$, одакле је $x = 81$. в) $x = 8$; г) $x = 4$.

д) После трансформације и замене $\log_3 x = t$ једначина се своди на $t^3 + t^2 - 2t = 0$. Решења су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{9}$.

531. а) Изрази, који се појављују у једначини дефинисани су за $x + 1 > 0$ и $x + 3 > 0$, тј. $x > -1$. Једначина се може трансофрмисати на облик $\log_3(x+1)(x+3) = 1$, тј. $(x+1)(x+3) = 3$, односно $x^2 + 4x = 0$. Одавде је $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. Вредност x_2 не задовољава услов $x > -1$, па је једино решење $x_1 = 0$;

б) $x_1 = \frac{1}{2}$; в) $x_1 = -1$; г) $x_1 = 3$; д) $x_1 = 1$; ђ) $x_1 = -2$; е) $x_1 = 12$; ж) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; з) $x_1 = -17$; и) $x_1 = -\frac{5}{4}$; ј) $x_1 = 6$; к) $x_1 = 1$; л) $x_1 = 48$.

532. а) Једначина има смисла само за $x > 0$. Имамо

$$\begin{aligned}\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x &= \log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x \\ &= \frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)\log_2 x = \frac{7}{4}\log_2 x,\end{aligned}$$

одакле је $\log_2 x = 4$, па је решење $x_1 = 16$;

б) $x_1 = \frac{1}{12}$; в) $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; г) $x_1 = 3$; д) $x = a^6$; ђ) $x_1 = 2^{-7}$, $x_2 = 2$; е) $x_1 = \sqrt{3}$.

533. а) Ако уведемо смену $3^x = y$, добићемо квадратну једначину $3y^2 - 29y + 18 = 0$, чија су решења $y_1 = 9$, $y_2 = \frac{2}{3}$, одакле је $x_1 = 2$, $x_2 = \log_3(2/3)$; б) $x_1 = 4$, $x_2 = \log_3(81/5)$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_7 5$; г) $x_1 = 3$, $x_2 = \log_2(3/2)$;

д) Поделити са $4^{-1/x}$ и увести смену $(3/2)^{-1/x} = t$. Решење је $x_1 = \log_{(\sqrt{5}-1)/2}(3/2)$; ђ) $x_1 = 3\log_6 2$, $x_2 = 3$.

534. а) Једначину напишимо у облику $4^{\lg 4x}\left(\frac{1}{2} + 3\right) = 7^{\lg 4x}\left(\frac{1}{7} + 1\right)$, односно $4^{\lg 4x - 2} = 7^{\lg 4x - 2}$, тј. $\left(\frac{4}{7}\right)^{\lg 4x - 2} = 1$, што је еквивалентно са $\lg 4x - 2 = 0$, тј. $4x = 100$. Јединствено решење дате једначине је, дакле, $x_1 = 25$.

б) $x_1 = 100$; в) $x_1 = 64$; г) $x_1 = 1$;

д) Смена $t = 3^{1+\log_3 x}$. Добијамо $t_1 = 14$, $t_2 = -15$, одакле се добија јединствено решење дате једначине $x_1 = \frac{14}{3}$.

535. а) Ако уведемо смену $\log_2 x = t$, добићемо $t^2 = 2$, одакле је $x_{1,2} = 2^{\pm\sqrt{2}}$.

б) Смена $y = \log_3(3^x - 1)$. Решења су $x_1 = \log_3 28 - 3$, $x_2 = \log_3 10$.

в) Смена $\log_7 x + \log_x 7 = y$. Добија се $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$, а затим $x_1 = 49$, $x_2 = \sqrt{7}$.

г) Смена $y = \log_x 2$. Решења су $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 4$.

536. а) Ако леву и десну страну једначине степенујемо са x, након сређивања добијамо $5^{x^2} \cdot 2^{3x-3} = 5^{3x} \cdot 2^{2x}$. Логаритмовањем леве и десне стране ове једначине за основу 5, добијамо $(x-3)(x + \log_5 2) = 0$. Одавде су решења $x_1 = 3$, $x_2 = -\log_5 2$

б) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$; в) $x_1 = 10^{-1/2}$, $x_2 = 10^2$; г) $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 1000$;

д) Дата једначина еквивалентна је једначини $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)\log x = 0$ одакле налазимо решења $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. ђ) $x_1 = \frac{1}{100}$, $x_2 = 100$

537. а) Дата једначина еквивалентна је са једначином $7^{x+1} = 6 + 7^{-x}$, па и са једначином $(7 \cdot 7^x + 1)(7^x - 1) = 0$. Једино решење дате једначине је $x_1 = 0$.

б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; в) $x_1 = 2$; г) $x_1 = 3$; д) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

538. а) Једначина има смисла за $x > 0$. Ако логаритмујемо обе стране једначине за основу 10, добијамо $(1 + \lg x)\lg x = 1 + \lg x$, одакле се налази $\lg x = -1$ или $\lg x = 1$, па су решења $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 10$.

б) $x_1 = -0{,}9$, $x_2 = 99$; в) $x_{1,2} = \sqrt{10^{1\pm\sqrt{3}}}$; г) $x_1 = 10^{-5}$, $x_2 = 10^3$; д) $x_{1,2} = 3^{\pm\sqrt{2}}$; ђ) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 25$; е) $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$; ж) $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 10$; з) $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_{2,3} = 10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$.

и) Ако логаритмујемо једначину за основу 3, добићемо $\frac{1}{\log_3 x} + \log_3^2 x = 2$, одакле се добија једначина $y^3 - 2y + 1 = 0$, где је $y = \log_3 x$. Како је $y^3 - 2y + 1 = (y-1)(y^2 + y - 1)$, то је $y_1 = 1$, $y_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, тј. $x_1 = 3$, $x_{2,3} = 3^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$.

ј) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{675}$; к) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$; л) $x_1 = \frac{1}{10}$.

539. а) Област дефинисаности је $x > 1$, $x \neq 2$. Имамо да је $\log_{(x-1)} 4 = \frac{2}{\log_2(x-1)}$. Ако означимо $\log_2(x-1) = y$, наша једначина добија облик $1 + y = \frac{2}{y}$, или $y^2 + y - 2 = 0$, одакле је $y_1 = -2$, $y_2 = 1$ и $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = 3$.

б) После трансформација, добијамо $\log_4 x + \log_4(10 - x) = 2$, одакле налазимо решења $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

в) Након трансформација добијамо $\log_2 6 - \log_2(4 - x) = \log_2(3 + x)$, одакле налазимо једино решење $x_1 = 3$ (за $x = -2$ израз $\frac{1}{\log_6(3+x)}$ не постоји).

г) Упутство: квадрирати једначину. Резултат: $x = \frac{1}{9}$.

д) $x_1 = \frac{1}{625}$, $x_2 = 5$; ђ) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$; е) $x_1 = 3$, $x_2 = \sqrt{3}$; ж) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; з) $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; и) $x_1 = 2^{-6}$, $x_2 = 4$; ј) $x_1 = -\frac{1}{4}$; к) $x_1 = \frac{1}{2}$.

540. а) $x_1 = a$; б) $x_1 = a^{-4/3}$, $x_2 = a^{-1/2}$; в) за $-\infty < a < 10^{1-\sqrt{3}}$ нема решења; за $10^{1-\sqrt{3}} \leq a < 10^{-1/2}$, $x_1 = 10^{-1+\sqrt{3+4\lg a}}$, $x_2 = 10^{1-\sqrt{3}}$; за $a = 10^{-1/2}$, $x_1 = 10^{1-\sqrt{3}}$; за $10^{-1/2} < a < 10^{1+\sqrt{3}}$, $x_1 = 10^{-1+\sqrt{3+4\lg a}}$, $x_2 = 10^{1-\sqrt{3}}$; за $a = 10^{1+\sqrt{3}}$, $x_{1,2} = 10^{1\pm\sqrt{3}}$, $x_3 = 10^{-1+\sqrt{3+4\lg a}}$; за $a \geq 10^{1+\sqrt{3}}$, $x_{1,2} = 10^{1\pm\sqrt{3}}$; г) $x_1 = a^2$, за $a > 0$ и $a \neq 1$, $a \neq 1/\sqrt{2}$.

541. а) Неопходно је да буде $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$ и $y \neq 1$. Примењујући особине логаритама, прву једначину трансформишемо на еквивалентну једначину $3\log_x^2 y + 8\log_x y - 3 = 0$, одакле налазимо да је $\log_x y = 3^{-1}$ или $\log_y x = -3$, тј. $y = x^{1/3}$ или $y = x^{-3}$. Заменом добијених вредности у другу једначину добијамо да је скуп решења датог система $R = \{(1/4, 64), (8, 2)\}$.

б) Уочимо, прво, да мора бити $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Прва једначина је еквивалентна са $4xy = 9a^2$. Скуп решења система је $R = \left\{\left(\frac{9}{2}a, \frac{a}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, \frac{9}{2}a\right)\right\}$ за $a > 0$, $a \neq 1$. У противном, нема решења.

в) Прва једначина је еквивалентна са $(x - y)^2 = 4$ (под условом да је $x - y > 0$), што је еквивалентно са $x - y = 2$. Друга једначина је еквивалентна са $x + 2y = 5$, па добијамо да је дати систем еквивалентан систему $x - y = 2$, $x + 2y = 5$, чије је јединствено решење $(3, 1)$.

г) $(2, 2)$; д) $(2, 0)$; ђ) $(3, 2)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{64}\right)$; е) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; ж) $(8, 4)$.

542. а) Очигледно је да $\lg y$ има смисла за $y > 0$, па из прве једначине следи да је $x > 0$. Из друге једначине лако се уочава да је и $x \neq 1$ и $y \neq 1$. Логаритмовањем за основу 10 добијамо

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1 + \lg 4, \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4. \end{cases}$$

Заменом $\lg y = \frac{\lg 4}{\lg x}$ из друге једначине у прву и увођењем смене $\lg x = t$, добијамо

једначину $t^2 - (1 + \lg 4)t + \lg 4 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$, $t_2 = \lg 4$. Из

$$\begin{cases} \lg x = 1 \\ \lg y = \lg 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lg x = \lg 4 \\ \lg y = 1 \end{cases}$$

добијамо решења другог система: $(10, 4)$ и $(4, 10)$.

б) Систем једначина има смисла за $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$ и $y \neq 1$. Заменом $\log_y x = t$ прва једначина добија облик $(t - 1)^2 = 0$, па је $t = 1$, односно $x = y$. Заменом $x = y$ друга једначина добија облик $x^2 + x - 12 = 0$, чија су решења $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, па је једино решење система $(3, 3)$.

в) Систем једначина има смисла за $xy > 0 \land x - y > 0 \land x + y > 0 \land xy \neq 1$, односно за $x > 0 \land y > 0 \land x > y \land xy \neq 1$. Решавањем датог система, добијамо

$$x - y = xy, \qquad x + y = 1.$$

Заменом $x = 1 - y$ из друге једначине у прву, добијамо једначину $y^2 - 3y + 1 = 0$, чија су решења $y_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $y_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Вредности за x су $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0$. Решење система је $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ јер се лако проверава да је $x > y$ и $xy = \frac{1}{4}(4\sqrt{5} - 8) > 0$ и $\neq 1$.

г) Дати систем једначина се једноставно трансформише на еквивалентан

$$\begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4, \\ \log \dfrac{(x + y)^2}{x} = \log 9; \end{cases} \quad \text{односно на} \quad \begin{cases} y + 2x = 4, \\ (x + y)^2 = 9x; \end{cases}$$

за $x > 0$, $x + y \neq 0$. Решења су: $(1, 2)$ и $(16, -28)$.

543. а) $(1, 3)$; б) $(8, 2)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$; в) $R = \{(4, 3/2), (1/2, 5)\}$; г) $R = \{(6, -3), (36, -2)\}$.

544. а) $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$; б) $\left(\frac{16}{9}, \frac{4}{3}\right)$; в) скуп решења је $R = \{(1/81, -3), (27, 4)\}$; г) $R = \{(1/9, 1/3), (3, 9)\}$.

545. а) $\log_2 x > 0 \iff \log_2 x > \log_2 1 \land x > 0 \iff x > 1 \land x > 0 \iff x > 1$;

б) $\log_2 x < -1 \iff \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2} \land x > 0 \iff x < \frac{1}{2} \land x > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$;

в) $\log_{1/64} x > -\frac{1}{2} \iff \log_{1/64} x > \log_{1/64} 8 \land x > 0 \iff x < 8 \land x > 0 \iff 0 < x < 8$;

г) $0 < 3x - 2 < 1 \iff \frac{2}{3} < x < 1$;

д) $0 < x^2 - 7x + 10 < 1 \iff \frac{7 - \sqrt{13}}{2} < x < 2 \lor 5 < x < \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$.

ђ) За $x > 1$ имамо $\log_x 32 > 5 \iff \log_x 32 > \log_x x^5 \iff 32 > x^5 \iff x < 2$. За $0 < x < 1$ добијамо $\log_x 32 > 5 \iff \log_x 32 > \log_x x^5 \iff 32 < x^5 \iff x > 2$, што је немогуће. Дакле, решење је $1 < x < 2$. е) $0 < x < 1 \lor x > 5$.

546. а) Неједначина је еквивалентна са $\log_{1/5} \frac{4x + 6}{x} \geq \log_{1/5} 1$. Ова неједначина еквивалентна је систему

$$0 < \frac{4x + 6}{x} \leq 1, \quad \text{тј.} \quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0 \land x(x + 2) \leq 0.$$

Решење је $-2 \leq x < -\frac{3}{2}$.

б) $-1 \leq x < 1 \vee 3 < x \leq 5$; в) $x < -3 \vee x > 1$; г) $-3 < x < -\sqrt{6} \vee \sqrt{6} < x < 3$; д) $x \geq 2$; ђ) $-4 < x < -3 \vee x > 8$; е) $2 < x < \frac{5}{2}$; ж) $x \in (1, 3/2]$; з) $x \in [-3, -2) \cup (2, 3]$; и) $x \in (0, 1] \cup [2, +\infty)$.

547. а) Област дефинисаности је $1 - x > 0$ и $x + 2 > 0$, тј. $-2 < x < 1$. Како је $\log_{1/3}(x + 2) = \log_3(x + 2)^{-1}$, то је неједначина еквивалентна са $1 - x < \frac{1}{x+2}$ и, како је $x > -2$, са $(1 - x)(x + 2) < 1$, односно $-x^2 - x + 1 < 0$. Решења дате неједначине су $-2 < x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1$.

б) $\frac{2}{3} < x \leq 1 \vee x \geq 2$. в) $0 < x < 2$. г) $x > \frac{3}{4}$. д) $x > 4^{\log_{0,s} 0,2}$. ђ) $0 < x < 27$.

548. а) $1/4 < x < 1/2$ или $1 < x < 4$; б) Израз $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3)$ дефинисан је за оне вредности x за које важи $x - 3 > 0$, $x - 3 \neq 1$, $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) > 0$, односно $x \in (3, 4) \cup (4, +\infty)$. У интервалу $(3, 4)$ решења добијамо из $x^2 - 4x + 3 > 1$, тј. $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$. Како је $2 - \sqrt{2} < 3 < 2 + \sqrt{2} < 4$, решења су сви бројеви x из интервала $(2 + \sqrt{2}, 4)$. У интервалу $(4, +\infty)$ решења се одређују из услова $x^2 - 4x + 3 < 1$, па следи да у овом интервалу нема решења. Закључујемо да је скуп решења дате неједначине $(2 + \sqrt{2}, 4)$.

549. а) Нека је, прво, $0 < 2x + 3 < 1$, тј. $-\frac{3}{2} < x < -1$. Тада је дата неједначина еквивалентна са $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x + 3)$, тј. $x^2 > 2x + 3$, тј. $x < -1$ или $x > 3$. Због услова $-\frac{3}{2} < x < -1$ решење у првом случају је управо $-\frac{3}{2} < x < -1$. Нека је, сада, $2x + 3 > 1$, тј. $x > -1$. Дата неједначина је сада еквивалентна са $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x + 3)$, тј. $x^2 < 2x + 3$ и $x \neq 0$. Решење је овде $-1 < x < 3$ и $x \neq 0$. Према томе, решење дате неједначине су сви реални бројеви x за које важи $-\frac{3}{2} < x < -1$ или $-1 < x < 0$ или $0 < x < 3$.

б) $0 < x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < 2 \vee 3 < x < 6$; в) $0 < x \leq \frac{1}{2} \vee x > 1$; г) $0 < x < \frac{1}{2}$; д) $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$; ђ) $1 < x < 4$.

550. а) Заменом $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ добијамо $t^3 + t - 2 = 0$. Искористимо чињеницу да је $t^3 + t - 2 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$. Једино реално решење је $t_1 = 1$, одакле је $x_1 = 0$ једино решење дате једначине. б) $x_1 = 0$. в) Једначина се може писати у облику $(5 \cdot 5^{2x} - 1)(6 - 6^x) = 0$. Решења су $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. г) Једначина се може написати у облику $(3^x - 3)(1 - 7 \cdot 7^{2x}) = 0$, одакле се налази решење $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

551. а) За $x = 2$ важи $3^x + 4^x = 5^x$. За $x < 2$ имамо $3^x + 4^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} > 3^2 \cdot 5^{x-2} + 4^2 \cdot 5^{x-2} = (3^2 + 4^2)5^{x-2} = 5^2 \cdot 5^{x-2} = 5^x$. За $x > 2$ важи $3^x + 4^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} < 3^2 \cdot 5^{x-2} + 4^2 \cdot 5^{x-2} = 5^x$. Према томе, $x_1 = 2$ је једино решење.
б) $x_1 = 2$.

Напомена. Приметимо да се у обема једначинама појављују тзв. Питагорине тројке природних бројева, наиме, бројеви a, b, c који задовољавају једначину $a^2 + b^2 = c^2$. На исти начин решавају се одговарајуће једначине и за било коју другу тројку Питагориних бројева.

552. а) Уочавамо да је $\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 = 2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)$. Решење је $x_1 = 1$.

б) Имамо да је $\left(3^x + \frac{2}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} + \frac{8}{3^{3x}} + 6\left(3^x + \frac{2}{3^x}\right)$. Решења су $x_1 = 0$, $x_2 = \log_3 2$.

в) Једначина се може написати у облику $(2^x - 5^x)(2^{x+2} - 5^{x+2}) = 0$. Решења су: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

г) Поделити леву и десну страну једначине са 5^{2x} и увести смену $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. Решења су: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

553. а) 60; б) $3 + a$.

554.

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \log_6 x + 3\log_3 9x + \log_6 x^{-1} + 3\log_3 9x^{-1} \\ &= \log_6 x + 3\log_3 9 - \log_6 x + 3\log_3 9 + 3\log_3 x - 3\log_3 x \\ &= 6\log_3 9 = 12\log_3 3 = 12. \end{aligned}$$

555.

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \ln\frac{1+x}{1-x} + \ln\frac{1+y}{1-y} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}\right) = \ln\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} \\ &= \ln\frac{\dfrac{x+y}{1+xy} + \dfrac{1+xy}{1+xy}}{\dfrac{1+xy}{1+xy} - \dfrac{x+y}{1+xy}} = \ln\frac{1 + \dfrac{x+y}{1+xy}}{1 - \dfrac{x+y}{1+xy}} = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \end{aligned}$$

556. Према услову задатка важи

$$\log_a m - \log_{am} m = \log_{am^2} m - \log_{am^3} m,$$

$m, a, am, am^2, am^3 > 0$, $a, am, am^2, am^3 \neq 1$. Ако означимо $x = \log_m a$ биће (за $m \neq 1$): $\log_m am = x+1$, $\log_m am^2 = x+2$, $\log_m am^3 = x+3$, па добијамо једначину $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$. Решење ове једначине је $-\frac{3}{2}$, па су за $m \neq 1$ тражени логаритми редом једнаки $-\frac{2}{3}, -2, 2, \frac{2}{3}$. Ако је $m = 1$, сви тражени логаритми једнаки су нули.

557. Како је број a основа логаритама мора бити $0 < a < 1$ или $a > 1$. Даље имамо

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x = \log_a x + \frac{1}{2}\log_a x = \frac{3}{2}\log_a x = \log_{a^2} x^3,$$

па је дата једначина еквивалентна једначини

$$\log_{a^2}(x + a^2 - a)^3 = 2\log_{a^2} x^3.$$

За $x > 0$ и $x > a - a^2$ ова једначина је еквивалентна са $x + a^2 - a = x^2$. Решења последње једначине у скупу реланих бројева су $x_1 = a$, $x_2 = 1 - a$. Дакле, за $0 < a < 1$ решења дате једначине су $x_1 = a$ и $x_2 = 1 - a$, а за $a > 1$ решење је $x_1 = a$. У осталим случајевима нема решења.

558. а) Изрази $\log_2(x^2+2x-7)$ и $\log_{9-6x+x^2} 4$ дефинисани су за $x^2+2x-7>0$, $9-6x+x^2=(3-x)^2>0$, $9-6x+x^2\neq 1$, тј. $x\in(-\infty,-1-2\sqrt{2})\cup(-1+2\sqrt{2},+\infty)\setminus\{2,3,4\}$. При том услову дата једначина је еквивалентна, редом, са једначинама

$$\log_2(x^2+2x-7)=\frac{1}{2}\log_2(9-6x+x^2),\quad x^2+2x-7=|x-3|.$$

За $x\geq 3$ добијамо једначину $x^2+x-4=0$, чија решења $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17})$ не задовољавају услов $x\geq 3$. У случају $x<3$ добијамо једначину $x^2+3x-10=0$, чија су решења $x_1=2$, $x_2=-5$. Како 2 не припада области дефинисаности, то је -5 једино решење дате једначине; б) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$.

559. а) Корени једначине су реални ако је дискриминанта већа или једнака од нуле, тј. $4+4\lg a\geq 0$, односно $a\geq\frac{1}{10}$; б) $a\geq\frac{1}{16}$.

560. а) Ако означимо $t=(2+\sqrt{3})^x$, због $2-\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{-1}$, дата неједначина еквивалентна је са $t^2-4t+1\geq 0$, $t>0$. Решење овог система неједначина је $t\in(0,(2+\sqrt{3})^{-1}]\cup[2+\sqrt{3},+\infty)$, одакле је решење дате неједначине $x\leq -1$ или $x\geq 1$.

б) Како је $x-x\lg 2=x(1-\lg 2)=x(\lg 10-\lg 2)=x\lg 5=\lg 5^x$, дата неједначина еквивалентна је са $\lg(5^x+x-20)>\lg 5^x$, тј. са следећим системом неједначина: $5^x+x-20>0,\quad 5^x+x-20>5^x$. Решење је сваки број $x>20$.

561. а) Увести смену $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x=t$. Тада је $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x=\frac{1}{t}$. Скуп решења је $[-4,4]$. б) $x\in[-4,4]$.

562. а) Како је $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}=\dfrac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}$, дата једначина је еквивалентна са:

$$\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x}=10.$$

Сменом $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=t$ добијамо једначину $t^2-10t+1=0$ чија су решења $t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}$. Из $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=5-\sqrt{24}$ и $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=5+\sqrt{24}$ добијају се решења дате једначине $x_1=2$, $x_2=-2$.

б) $x_1=2$, $x_2=-2$; в) $x_{1,2}=\pm 2$; г) $x_1=1$, $x_2=3$; д) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$.

563. а) Постоје две могућности: или је $x^2-1=0$, $x^2-x-1>0$, или је $x^2-x-1=1$. У првом случају решење је $x_1=-1$, а у другом $x_2=2$ (јер се решење $x_3=-1$ већ појавило);

б) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$; в) због $x-3>0$, решење је $x_1=4$; г) $0\leq x\leq 1$.

564. а) Ако уведемо смену $7^{\sqrt{x-2}}=t$, добијамо квадратну неједначину $49t^2-344t+7\leq 0$, одакле се добија $\frac{1}{49}\leq t\leq 7$, тј. $-2\leq\sqrt{x-2}\leq 1$, одакле $2\leq x\leq 3$; б) $1\leq x<10$; в) $x\geq\frac{5}{2}$ (*Упутство.* Смена $x-3+\sqrt{x^2-4}=t$); г) $x\geq 3$ (*Упутство.* Смена $\dfrac{\sqrt{x^2-5}+6x-16}{6}=t$).

565.
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\log_a 2\cdot\log_a 2^2}+\frac{1}{\log_a 2^2\cdot\log_a 2^3}+\cdots+\frac{1}{\log_a 2^{n-1}\cdot\log_a 2^n}\\&=\frac{1}{1\cdot 2\log_a^2 2}+\frac{1}{2\cdot 3\log_a^2 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n\log_a^2 2}\\&=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)\log_2^2 a\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\log_2^2 a=\frac{n-1}{n}\log_2^2 a.\end{aligned}$$

566. а) Како је $3^{\log_3^2 x}=(3^{\log_3 x})^{\log_3 x}=x^{\log_3 x}$, то је дата једначина еквивалентна са $2x^{\log_3 x}=162$, тј. $x^{\log_3 x}=81$. Логаритмовањем за основу 3 добијамо еквивалентну једначину $\log_3 x\cdot\log_3 x=4$, тј. $\log_3 x=\pm 2$. Решења дате једначине су, дакле $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=9$.

б) После трансформација добијамо еквивалентну једначину $3^{4x}+2^{4x}-3\cdot 6^{2x}=0$. Ако уведемо смену $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=y$, добићемо квадратну једначину $y^2-3y+1=0$. Решења дате једначине су $x_{1,2}=\dfrac{\log(3\pm\sqrt{5})-\log 2}{\log 4-\log 9}$.

567. „Доведимо“ све логаритме на основу 10:

$$\frac{\lg x\cdot\lg x\cdot\lg x}{\lg 3\cdot\lg 4\cdot\lg 5}=\frac{\lg x\cdot\lg x}{\lg 3\cdot\lg 4}+\frac{\lg x\cdot\lg x}{\lg 4\cdot\lg 5}+\frac{\lg x\cdot\lg x}{\lg 5\cdot\lg 3}.$$

После сређивања, добија се $\lg^2 x(\lg x-\lg 60)=0$. Решења су $x_1=1$, $x_2=60$.

568. а) $-4<x<-3$ или $x>4$; б) $1-\sqrt{7}<x\leq -1\vee -\frac{1}{3}<x<0\vee 0<x<\frac{1}{3}\vee 2\leq x<1+\sqrt{7}$; в) $3<x<5-\sqrt{3}\vee x>7$; г) $-\frac{4}{3}<x<-1\vee -1<x<-\frac{1}{2}$; д) $x>0{,}01$; ђ) $\frac{1}{9}\leq x<\frac{1}{3}\vee 1\leq x\leq 3$; е) $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; ж) $x\in(2,+\infty)$.

569. а) Како је $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, можемо увести смену $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=y$. Тада једначина постаје $y+\frac{1}{y}=\frac{101}{10}$. Решења ове квадратне једначине су $y_1=\frac{1}{10}$, $y_2=10$. Први корен не долази у обзир јер је $2+\sqrt{3}<4$ и $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}<1/4$ (због $x^2-2x\geq -1$). Остаје још једначина $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=10$. Њена решења су $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{\lg(2+\sqrt{3})}}$.

б) $x=10$ или $x=10^5$.

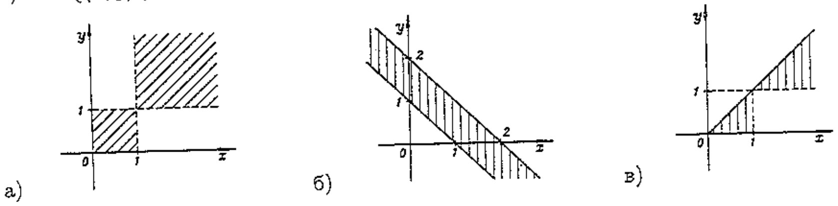
570. а) Ако уведемо замену $3^{-|x-2|}=y$, добићемо квадратну једначину $y^2-4y-a=0$, чија су решења $y_{1,2}=2\pm\sqrt{4+a}$. Први корен се мора одбацити, јер је $-|x-2|\leq 0$ и $3^{-|x-2|}\leq 1$, а $2+\sqrt{4+a}\geq 2$. Посматрајмо други корен $3^{-|x-2|}=2-\sqrt{4+a}$. Да би ова једначина имала решења, мора бити задовољен следећи систем неједначина:

$$4+a\geq 0,\quad 2-\sqrt{4+a}\geq 0,\quad 2-\sqrt{4+a}\leq 1.$$

Решавањем налазимо $-3\leq a<0$. Дакле, за $-3\leq a<0$ постоје два решења $x_{1,2}=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a})$, а за остале вредности a нема решења.

б) За $a\leq 1$, $x=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$, за остале a нема решења.

571. а) За $0 < y < 1$ добијамо $0 < x < 1$, а за $y > 1$ је $x > 1$; б) $0 < x + y - 1 < 1$; в) $S = \{(x,y) \mid 1 < y < x\} \cup \{(x,y) \mid 0 < y < x < 1\}$ (сл. 36).



Сл. 36

572. Како је $\log_5 6 > 1$, то $(\log_5 6)^{\sin x}$ узима највећу вредност за највећу вредност изложиоца, тј. за $\sin x = 1$. Како је $\log_6 5 < 1$, највећу вредност израз $(\log_6 5)^{\cos x}$ добија за најмању вредност изложиоца, тј. за $\cos x = -1$. С друге стране, важи $\log_5 6 = (\log_6 5)^{-1}$.

573. Све тачке равни, које задовољавају дату неједначину, одређене су једним од следећа два система неједначина:

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 > 1, \\ x + y \geq x^2 + y^2, \end{matrix} \quad (1) \qquad \begin{matrix} 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ 0 < x + y \leq x^2 + y^2. \end{matrix} \quad (2)$$

Ако у другој неједначини система (1) y посматрамо као параметар, добијамо неједначину по x:

$$x^2 - x + y^2 - y \leq 0.$$

Последња неједначина има решење само уз услов да је дискриминантна $D = -4y^2 + 4y + 1 \geq 0$. Решење ове неједначине је $\frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Највећа вредност за y је, према томе $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. За ту вредност друга неједначина система (1) је облика

$$x + \frac{\sqrt{2}+1}{2} \geq x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2, \qquad \text{тj.} \qquad 4x^2 - 4x + 1 \leq 0,$$

чије је једино решење $x = \frac{1}{2}$. При томе је за пар $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ и прва од неједначина система (1) задовољена. Из система (2) имамо да је $y < 1$, па зато други систем не даје решење за највеће y.

574. Нека је f тражена функција. Како су x и y позитивни, дата релација се може логаритмовати. Добијамо

$$f(y) \cdot \log x = f(x) \cdot \log y.$$

Ако овде заменимо $y = 2$, имаћемо

$$f(x) = \frac{f(2)}{\log 2} \cdot \log x, \quad \text{дакле,} \quad f(x) = c \cdot \log x, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Провером се установљава да све функције овог облика задовољавају дату једнакост.

575. Из услова задатка имамо $a^p = N$, $b^q = N$, $(abc)^r = N$, тј. $a = N^{1/p}$, $b = N^{1/q}$, $abc = N^{1/r}$, одакле је

$$ab = N^{1/p+1/q}, \quad (1) \qquad c = \frac{N^{1/r}}{ab}. \quad (2)$$

Заменом ab из (1) у (2), налазимо

$$c = \frac{N^{1/r}}{N^{1/p+1/q}} = N^{1/r-1/p-1/q} = N^{\frac{pq-r(p+q)}{pqr}},$$

одакле непосредно следи тражена релација.

577. Како је

$$\frac{1}{\log_x 2^{k-1} \cdot \log_x 2^k} = \frac{1}{k(k-1)(\log_x 2)^2} = \frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right),$$

лева страна датог идентитета је

$$\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}(\log_x 2)^{-2}.$$

578. Ако је $m = 2l$, тада је $d_1 d_{2l-1} = d_2 d_{2l-2} = \ldots = d_{l-1} d_{l+1} = d_l^2 = n$, па је

$$\frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^{m-1} \log d_k = \frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^{l-1} \log d_k d_{2l-k} + \frac{1}{\log n} \log d_l^2$$
$$= \frac{2}{\log n}(l-1)\log n + \frac{1}{\log n}\log n = 2l - 1.$$

На сличан начин доказује се да је

$$\frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^{m-1} \log d_k = 2l, \quad \text{ако је } m = 2l + 1.$$

579. Нека је $r = \frac{m}{n}$ и $\log_2 r = \frac{p}{q}$, где $m, n, q \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}$ и $(m,n) = 1$, $(p,q) = 1$. Тада је

$$\frac{m}{n} = 2^{p/q}, \qquad \text{тj.} \qquad n^q \cdot 2^p = m^q.$$

Претпоставимо да је $p > 0$ и $m = 2^k \cdot m_1$, где $k \in \mathbf{N}$, а m_1 је непаран природан број. Тада је $n^q \cdot 2^p = 2^{kq} \cdot m_1^q$. Како су m_1 и n непарни (n је непарно, јер је m парно), мора бити $p = kq$. Како су p и q узајамно прости, мора бити $q = 1$, па је $r = 2^p$, где $p \in \mathbf{N}$. Ако је $p = 0$, добијамо $r = 1$. Ако је $p < 0$ и $n = 2^k n_1$ ($k \in \mathbf{N}$, n_1 — непаран), биће $n_1^q 2^{kq} = 2^{-p} m^q$. Како су m и n_1 непарни, мора бити $kq = -p$, па је $q = 1$, јер су p и q узајамно прости. Према томе, сви бројеви који задовољавају услов задатка су облика 2^p, где $p \in \mathbf{Z}$.

580. а) Из $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ следи $\log_a a = 1$, $\log_a b > 0$, $\log_a c > 0$, па, примењујући неједнакост између аритметичке и геометријске средине, налазимо

$$\frac{\log_a a + \log_a b + \log_a c}{3} \geq \sqrt[3]{\log_a a \log_a b \log_a c}.$$

Даље добијамо

$$(\log_a abc)^3 \geq 27 \log_a b \log_a c,$$

одакле следи тражена неједнакост.

б) Дата неједнакост је тачна за $a > 0$, јер је еквивалентна следећим неједнакостима $\log_3^2 a + 2\log_3 a(1 - \log_3 a) \leq 1$, $2\log_3 a - \log_3^2 a \leq 1$, $(\log_3 a - 1)^2 \geq 0$, при чему је последња неједнакост тачна. Једнакост важи ако и само ако је $a = 3$.

581. а) Дата неједнакост еквивалентна је са

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\right)\geq\frac{3}{a+b+c}.$$

Обзиром на однос аритметичке и геометријске средине, можемо писати

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2\log_b a}{a+b}+\frac{2\log_c b}{b+c}+\frac{2\log_a c}{c+a}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{2^3\log_b a\log_c b\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$=2\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq 2\frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}=\frac{3}{a+b+c}.$$

582. а) Приметимо да важи $4=2^2=\log_7^2 7^2=\log_7^2 49>\log_7^2 48=(\log_7 8+\log_7 6)^2=\log_7^2 8+\log_7^2 6+2\log_7 8\cdot\log_7 6\geq 4\log_7 8\cdot\log_7 6=\dfrac{4\log_7 8}{\log_6 7}$, одакле следи $\log_7 8<\log_6 7$.

г) $\lg^2 9+\lg^2 11=(\lg(0{,}9\cdot 10))^2+(\lg(1{,}1\cdot 10))^2=(1+\lg 0{,}9)^2+(1+\lg 1{,}1)^2=1+2\lg 0{,}9+\lg^2 0{,}9+1+2\lg 1{,}1+\lg^2 1{,}1>2+2(\lg 0{,}9+\lg 1{,}1)=2+2\lg 0{,}99=2+\lg 0{,}9801=\lg 98{,}01>\lg 98$.

583. Логаритмовањем за основу 2, имаћемо

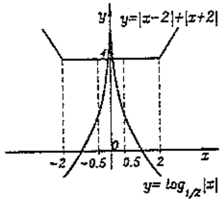
$$\frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x}\log_2^2 x+\log_2^4 x=1.$$

Након трансформисања, добијамо еквивалентну једначину

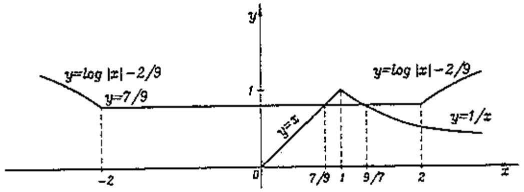
$$(\log_2 x-1)(\log_2^4 x+2\log_2^3 x+\log_2^2 x+2\log_2 x+1)=0.$$

За $x>1$ други чинилац је позитиван, па закључујемо да је за $x>1$ једино решење једначине $x_1=2$.

584. Како су $\log_{1/2}|x|$, $|x-2|+|x+2|$ парне функције, довољно је решити једначину за $x>0$, а затим искористити чињеницу да, ако је $x_1=c$ корен једначине, тада је и $x_2=-c$ такође корен. За $0<x\leq 2$ имамо да је $|x|=x$, $|x-2|+|x+2|=-x+2+x+2=4$, па једначина постаје $\log_{1/2}x=1$, тј. $x_1=\dfrac{1}{2}$. За $x>2$ добијамо $\log_{1/2}x=\dfrac{1}{2}x$. За $x>2$ важи $\log_{1/2}x<0$, $\dfrac{1}{2}x>0$, па последња једначина нема решења. Дакле, сва решења једначине су $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}$ (сл. 37).



Сл. 37



Сл. 38

585. Једначина има смисла само за $x>0$. Трансформацијом се лева страна једначине своди на x, ако је $0<x\leq 1$, односно $\dfrac{1}{x}$, ако је $x>1$, а десна страна на $\log_2|x|-\dfrac{2}{9}$, ако је $|x|>2$, односно $\dfrac{7}{9}$, ако је $|x|\leq 2$. Решења су $x_1=\dfrac{7}{9}$, $x_2=\dfrac{9}{7}$ (сл. 38).

Глава IV – Тригонометријске функције

586. Из $180^\circ=\pi\,\mathrm{rad}$ следи: а) $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$; б) $\varphi=\dfrac{11\pi}{6}$; в) $\varphi=\dfrac{\pi}{10}$; г) $\varphi=\dfrac{49\pi}{720}$; д) $\varphi=\dfrac{37\pi}{360}$; ђ) $\varphi=\dfrac{8\pi}{225}$.

587. а) $\alpha=135^\circ$; б) $\alpha=105^\circ$; в) $\alpha=160^\circ$. **588.** б) 30°, 60° и 90°; $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2}$.

589. 60°, 80°, 90° и 130°; $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{9}$, $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{13\pi}{18}$. **590.** Из $180^\circ=\pi\,\mathrm{rad}$ следи: $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\approx 0{,}017453$, $1'=\dfrac{\pi}{180\cdot 60}\approx 0{,}000291$, $1''=\dfrac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60}\approx 0{,}000005$.

591. а) $95\cdot 0{,}017453\,\mathrm{rad}=1{,}65804\,\mathrm{rad}$, $46\cdot 0{,}000291\,\mathrm{rad}=0{,}01339\,\mathrm{rad}$, $54\cdot 0{,}000005\,\mathrm{rad}=0{,}00027\,\mathrm{rad}$; укупно, $95^\circ 46'54''=1{,}67170\,\mathrm{rad}$; б) $1{,}08620\,\mathrm{rad}$; в) $1{,}37564\,\mathrm{rad}$.

592. $1\,\mathrm{rad}=\dfrac{180^\circ}{\pi}\approx 57{,}29578^\circ=57^\circ 17'44{,}806''$, $1\,\mathrm{rad}=\left(\dfrac{180\cdot 60}{\pi}\right)'\approx 3438'$, $1\,\mathrm{rad}=\left(\dfrac{180\cdot 60\cdot 60}{\pi}\right)''\approx 206265''$.

593. На основу претходног задатка је: а) $0{,}2755\,\mathrm{rad}=0{,}2755\cdot 57{,}29578^\circ=15{,}78499^\circ$, $0{,}2755\,\mathrm{rad}=0{,}2755\cdot 3438'=947{,}169'$, $0{,}2755\,\mathrm{rad}=0{,}2755\cdot 206265''=56826''$; од сваког од ових бројева добија се да је $0{,}2755\,\mathrm{rad}=15^\circ 47'6''$; б) $62^\circ 14'7''$; в) $39^\circ 0'30''$.

594. а) Из $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ добијамо $\cos^2\alpha=\dfrac{8}{9}$. То значи да је $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ или $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Како је α у трећем квадранту, то је $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Даље је: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=2\sqrt{2}$.

б) $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{5}{12}$; в) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

595. а) $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{5}{12}$; б) $\sin\alpha=\dfrac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{24}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{7}{24}$;

в) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$, $\cos\alpha=\dfrac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{m}$, $m\neq 0$.

596. а) $\cos\alpha=\pm\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\pm 2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\pm\dfrac{1-t^2}{2t}$.

597. а) *Први начин*: Како је $|\sin\alpha| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ и $|\cos\alpha| = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$, добија се: $|\sin\alpha| = \dfrac{3}{5}$ и $|\cos\alpha| = \dfrac{4}{5}$. Но пошто је α оштар угао то је $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.
Други начин: Из $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$ и $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, добија се: $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

б) Како је $\operatorname{tg}\alpha < 0$, а $\sin\alpha > 0$ $(0 < \alpha < \pi)$, то је $\cos\alpha = -\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$, следи да је $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. в) $\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{3}$.

598. Из $\sin^2 15° = 1 - \cos^2 15°$ добијамо $\sin 15° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

599. $\cos 22°30' = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **600.** а) не; б) да; в) не.

601. Имајући у виду да је $a^3 - b^3 = 0$ ако и само ако је $a = b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, посматрани израз је дефинисан за све $x \in \mathbf{R}$. Због: $\operatorname{tg} x = 2 \implies \sin x \neq \cos x$. То даје

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - 1} = \frac{2^3+1}{2^3-1} = \frac{9}{7}.$$

602. Када се именилац и бројилац поделе са $\cos\alpha \neq 0$. добија се: $\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 2} = 1$, одакле је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{2}$.

603. а) Из $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ добија се $\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, одакле је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \vee \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, односно $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Даље је $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{5}$. б) $\pm 3\sqrt{5}$, в) $\pm 8\sqrt{5}$.

604. Из једнакости $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = p$ квадрирањем следи $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = p^2$, одакле је $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = p^2 - 2$.

605. Ако се $\sin x + \cos x = s$ квадрира, онда је $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = s^2$ (1). После замене $\sin x\cos x = p$ у (1) добија се $1 + 2p = s^2$, односно $p = \dfrac{1}{2}(s^2 - 1)$.

606. Дати израз се може трансформисати у облик:

$$\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sin\alpha + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha \cdot \dfrac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha}}{\cos\alpha \cdot \dfrac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \geq 0.$$

607. а) Из система једначина $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 5$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, добија се да је $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

608. а) $\dfrac{2 - \operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1} - \operatorname{cosec}^2\alpha + 1 = \dfrac{1 - (\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} - 1} - (\operatorname{cosec}^2\alpha - 1) = \dfrac{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\dfrac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}} - \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha(1 - \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\alpha)}{1 - \operatorname{ctg}\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \wedge \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ за $k, n \in \mathbf{Z}$.

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \dfrac{1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$ за $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

в) Вредност израза је једнака 3, осим за $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, када израз није дефинисан.

609. *Први начин*:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi \text{ за } k \in \mathbf{Z}.$$

Други начин:

$$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Трећи начин:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff \sin^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) \iff \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \iff \sin^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

610. $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

611. $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$
$= 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)$
$= 3\sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha$
$= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$

612. $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)$
$= \sin^3\alpha\left(1 + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \cos^3\alpha\left(1 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \sin^3\alpha\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^3\alpha\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha}$
$= \sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha) = (\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \sin\alpha+\cos\alpha.$

613. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha}$
$= \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)} = \dfrac{2\sin\alpha}{\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$

614. Ако се други сабирак идентитета на левој страни трансформише, добија се:

$$\frac{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}.$$

Даље је

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x.$$

615. $(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha$
$= \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 2 - 2\cos\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha}$
$= \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$
$= \dfrac{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{(1 - \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \left(\dfrac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1\right)^2.$

616. *Први начин:*

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\,\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha-1-\sin\alpha)+1}{\cos^3\alpha}$$
$$=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Други начин: Ако се идентет напише у облику

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$$

и изврши трансформација леве стране, добија се:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

После трансформације десне стране, добија се:

$$\frac{1}{\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\,\frac{1+\sin\alpha}{1\sin\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Како се после трансформације леве и десне стране добија иста вредност, идентитет је доказан.

617. Трансформишемо леву страну:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Трансформишемо десну страну:

$$(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$
$$=(1+\cos\alpha)\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Дата идентичност је тачна, јер су лева и десна страна једнаке.

632. а) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{3}\sqrt{3},$

б) $\cos 315^\circ=\cos(360^\circ-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2};$

в) $\sin 300^\circ=\sin(360^\circ-60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{3};$

г) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$

633. а) $\sin\frac{9\pi}{4}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2};$

б) $\cos(6\pi+1)=\cos(3\cdot 2\pi+1)=\cos 1\approx\cos 57^\circ 18';$

в) $\sin(8\pi-1)=\sin(4\cdot 2\pi-1)=-\sin 1\approx-\sin 57^\circ 18'.$

634. а) 1; б) 4; в) 1; г) -2; д) 0; ђ) $\frac{2a^2}{\sin\alpha}$; е) $-\sin\alpha$; ж) $\operatorname{tg}\alpha$; з) 1; и) 1; ј) $\cos\alpha$; к) $\sin\alpha$; л) $\sin\alpha\cos\alpha$.

635.
$$\frac{a^2\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+b^2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{a\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+b\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-(a+b)\operatorname{tg}^2(2\pi-\alpha)$$
$$=\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha-b^2\operatorname{tg}\alpha}{a\operatorname{ctg}\alpha-b\operatorname{ctg}\alpha}-(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha}{(a-b)\operatorname{ctg}\alpha}-(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha$$
$$=(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha-(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha=0,\ \ a\neq b,\ \alpha\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

639. а)
$$\frac{\sin 750^\circ\cdot\cos 390^\circ\operatorname{tg}1140^\circ}{\operatorname{ctg}405^\circ\cdot\sin 1860^\circ\cdot\cos 780^\circ}$$
$$=\frac{\sin(2\cdot 360^\circ+30^\circ)\cos(360^\circ+30^\circ)\operatorname{tg}(3\cdot 360^\circ+60^\circ)}{\operatorname{ctg}(360^\circ+45^\circ)\sin(5\cdot 360^\circ+60^\circ)\cos(2\cdot 360^\circ+60^\circ)}$$
$$=\frac{\sin 30^\circ\cos 30^\circ\operatorname{tg}60^\circ}{\operatorname{ctg}45^\circ\sin 60^\circ\cos 60^\circ}=\sqrt{3};$$

б)
$$\frac{\cos\dfrac{17\pi}{6}\sin\dfrac{7\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{17\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\dfrac{10\pi}{3}\cos\dfrac{7\pi}{4}\sin\dfrac{8\pi}{3}}=\frac{\cos\left(3\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(4\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)}$$
$$=\frac{-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}}=-\frac{3}{2}\sqrt{2};\quad \text{в) } -\frac{3}{2};$$

г) $\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}2^\circ\cdots\operatorname{tg}44^\circ\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{ctg}44^\circ\cdots\operatorname{ctg}2^\circ\operatorname{ctg}1^\circ=1;$

д) $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\cos^2 44^\circ+\cdots+\cos^2 2^\circ+\cos^2 1^\circ=44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}.$

640. а) Како је $-1\leq\sin\alpha\leq 1$, то је $1-\sin\alpha\geq 0$ за сваку вредност α. Најмања вредност $1-\sin\alpha=0$ је за $\alpha=\frac{\pi}{2}$, највећа вредност $1-\sin\alpha=2$ је за $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.

б) $1-\cos\alpha\geq 0$ за сваку вредност угла α. Најмања вредност је $1-\cos\alpha=0$ за $\alpha=0$, $\alpha=2\pi$, највећа вредност је $1-\cos\alpha=2$ за $\alpha=\pi$.

в) $1-\operatorname{tg}\alpha>0$ за $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right].$

641. Како је $1995^\circ=11\cdot 180^\circ+15^\circ$, то је $\sin 1995^\circ=-\sin 15^\circ$, $\operatorname{tg}1995^\circ=\operatorname{tg}15^\circ$ и $\operatorname{ctg}1995^\circ=\operatorname{ctg}15^\circ$. Значи да је $a<0$, $b>0$ и $c>0$, као и $b<c$ (јер за $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ важи $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{ctg}\alpha$).

642. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$. Како је $\cos\frac{\pi}{2}=0$ и $\sin\frac{\pi}{2}=1$, добија се $\sin\alpha$.

643. а) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$,

б) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$,

в) $\mathrm{ctg}\,105^\circ=\mathrm{ctg}(60^\circ+45^\circ)=\frac{\mathrm{ctg}\,60^\circ\,\mathrm{ctg}\,45^\circ-1}{\mathrm{ctg}\,60^\circ+\mathrm{ctg}\,45^\circ}=\sqrt{3}-2$.

644. а) Очигледно је да лева страна представља синус збира два угла па је:

$$\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ=\sin(20^\circ+10^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

б) $\cos 47^\circ\cos 17^\circ+\sin 47^\circ\sin 17^\circ=\cos(47^\circ-17^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

645. а) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$;

б) $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

646. а) $\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{7\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$;

б) $\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0$.

647. Из формуле $|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, следи, по услову задатака, да је $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$, а $\cos\beta=-\frac{12}{13}$. Даље је $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{12}{13}\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\frac{5}{13}=-1$.

648. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$. Даље је $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{33}{65}$.

649. а) 0 и $\frac{24}{25}$; б) $-\frac{13}{85}$ и $-\frac{77}{85}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ и $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$. **650.** 0.

651. а) $\frac{2-3\sqrt{7}}{10}$; б) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(m+\sqrt{1-m^2})$, $-1<m<1$.

652. Користећи формулу $|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$ за $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ добија се $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$, $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\beta=-\frac{8}{17}$ и $\sin\beta=-\frac{15}{17}$. Даље је $\cos(\alpha+\beta)=\left(-\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{8}{17}\right)-\frac{24}{25}\left(-\frac{15}{17}\right)=\frac{416}{425}$.

653. а) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}$. Из формуле $|\mathrm{tg}\,\alpha|=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, добија се $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{12}{5}$, па је $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{7}{17}$; б) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=1$;

в) Из $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$, добија се $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{2}{3}$ и $\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}=\frac{2}{5}$, па је $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=-\frac{19}{4}$.

654. а) Користећи формулу за синус збира два угла, добија се $\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin 3\alpha$.

б) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\sin\beta\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=1$, за $\alpha\neq\pi k\vee\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, $k,n\in\mathbf{Z}$.

в) $\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\mathrm{tg}\,\alpha}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\alpha\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$. г) $\mathrm{tg}\,\alpha$, за $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, $k,n\in\mathbf{Z}$.

655. а) $2\cos\alpha\sin\beta$; б) $-\frac{3}{4}$; в) $\cos^2\alpha$; г) $2\,\mathrm{tg}\,2\alpha$; д) $\cos 2\beta$.

656. а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

657. После замене за дате вредности $\mathrm{tg}\,x$ и $\mathrm{tg}\,y$ у формули $\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$ и свођења двојног разломка добија се да је $\mathrm{tg}(x+y)=1$.

658. а) 1; б) $\frac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 21^\circ\sin 9^\circ}=\frac{\sin(20^\circ+10^\circ)}{\sin(21^\circ+9^\circ)}=1$. **659.** 1.

660. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$. Следи да је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ ако су α и β оштри углови.

661. Ако се у формули за збир тангенса два угла замене дате вредности, добија се $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{p}{q}+\frac{q-p}{q+p}}{1-\frac{p}{q}\cdot\frac{q-p}{q+p}}=1$. Следи да је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Долази у обзир само $k=0$ и $k=-1$ јер $-\pi<\alpha+\beta<\pi$. **663.** 3/4.

664. $\sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{17\sqrt{2}}{26}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$. Из $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ следи $\alpha=\beta+\frac{\pi}{4}$, па је $\sin\alpha = \sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\beta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\beta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

665. $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$, $\cos\beta = \cos(60^\circ-\alpha) = \frac{23}{26}$.

666. $(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2 = \sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 y+\cos^2 y+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y) = 2+2\cos(x-y)$.

667.

$$\begin{aligned}
A &= \sin^2(\alpha+x)-2\sin\alpha\cos x\sin(\alpha+x)+\cos^2 x\\
&= \sin^2\alpha\cos^2 x+2\sin\alpha\cos\alpha\sin x\cos x+\cos^2\alpha\sin^2 x\\
&= 2\sin^2\alpha\cos^2 x-2\sin\alpha\cos\alpha\sin x\cos x+\cos^2 x\\
&= \cos^2\alpha\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2\alpha\cos^2 x\\
&= \cos^2\alpha\sin^2 x+\cos^2 x(1-\sin^2\alpha)\\
&= \cos^2\alpha\sin^2 x+\cos^2\alpha\cos^2 x\\
&= \cos^2\alpha(\sin^2 x+\cos^2 x) = \cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

Дакле, $A=\cos^2\alpha$, а тај израз не садржи x.

668. Применом формуле за тангенс разлике два угла, дата једнакост прелази у $\operatorname{tg} y = (2+3\operatorname{tg}^2 y)\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$, а после замене $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}\operatorname{tg} y$ десна страна се трансформише у $\operatorname{tg} y$.

669. $\frac{\operatorname{ctg} y+\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y-\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos y}{\sin y}-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\sin y\cos x}}{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\sin y}} = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$, за $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $y\neq n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

672. Ако се бројилац и именилац леве стране поделе са $\cos\alpha$ добија се

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-1\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right),$$

за $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

673. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\left(1-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\times\left(1-\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\right) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

677. Трансформисати дати идантитет у облику $\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma) = 1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$, одакле је $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}$. Даље је $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(\beta+\gamma) = \operatorname{ctg}(\pi-\beta-\gamma)$. Како су α, β и γ оштри углови, то је $\alpha=\pi-\beta-\gamma$ или $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

678. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{12}+\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{12}\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1$, тј. $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$.

679. Квадрирањем а затим сабирањем датих једнакости, добија се $\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y = a^2$, $\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y = b^2$, односно $1+1+2\cos x\cos y+2\sin x\sin y = a^2+b^2$, одакле је $\cos(x-y) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$.

680. Дата једнакост може се написати у облику

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 z}{\sin^2 x} &= 1-\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x} = 1-\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}\frac{\cos x}{\sin x}\\
&= \frac{\sin x\cos(x-y)-\cos x\sin(x-y)}{\sin x\cos(x-y)} = \frac{\sin(x-x+y)}{\sin x\cos(x-y)},
\end{aligned}$$

одакле је

$$\sin^2 z = \frac{\sin x\sin y}{\cos(x-y)}, \qquad \cos^2 z = 1-\frac{\sin x\sin y}{\cos(x-y)} = \frac{\cos x\cos y}{\cos(x-y)}.$$

Коначно $\operatorname{tg}^2 z = \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y$, за $x\neq\frac{k\pi}{2}$, $y\neq\frac{\pi}{2}+l\pi$, $z\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$, $x-y=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $k,l,m\in\mathbf{Z}$.

681.

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)}{2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ за } \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

682. Ако се из система $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos^2 a-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$ елиминише $\cos^2\alpha$, добија се формула 3°. Ако се елиминише $\sin^2\alpha$, добија се формула 4°.

684. а)

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\
&= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\
&= 2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.
\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha\\
&= (2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\
&= 2\cos^3-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

в)

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha}$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

г)

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \operatorname{ctg}(2\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 + 2\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

685. Једнакости се добију из формуле синуса троструког угла и формуле косинуса троструког угла.

686. а) $\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$. Даље је

$$\sin 2\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{4}{5} = -\frac{24}{25}, \qquad \cos 2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}.$$

б) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$.

687. а) $-\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{120}{119}$; б) $0,96$; $0,28$; $3\frac{3}{7}$.

688. $\sin 2x = \pm\frac{4\sqrt{mn}(m-n)}{(m+n)^2}$, $\cos 2x = \frac{4mn-(m-n)^2}{(m+n)^2}$.

689. Из $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, следи да је $1-2\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$, односно $(\sin\alpha)_1 = \frac{1}{3}$ и $(\sin\alpha)_2 = -\frac{1}{3}$. Како је по услову задатака $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ решења су: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. **690.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $2\cos 2\alpha$; в) 1; г) $1+\sin 4\alpha$.

693. а) Ако се у формули $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ замени $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, добија се $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; б) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

694. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}$

$= \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha = 6$, за $\alpha \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

695. Како је $\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha$ добија се

$$A = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)(1-\operatorname{tg}\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

за $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2}$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

703. $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{1+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}.$

Из $\dfrac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^3 2\alpha} = 7$, следи $\sin^2 2\alpha = \frac{8}{9}$.

704. а) За $\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\frac{2\pi}{7}$ дати израз добија облик

$$A = -\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Користећи формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, даље је

$$A = -\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= -\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

б) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

$= \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ за $\alpha \neq 2\pi k - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

705. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

706. Ако $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, тада је $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$. У формули $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ по услову задатка именилац се налази у интервалу 0 до 1, па је $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$.

707. а) $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = \frac{\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cos 10°}$

$= \dfrac{2(\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°)}{2\sin 10°\cos 10°} = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 20°}$

$= \dfrac{4(\cos 60°\cos 10° - \sin 60°\sin 10°)}{\sin 20°} = \dfrac{4\cos 70°}{\sin 20°} = 4.$

709. а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 6}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 2} = \dfrac{\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$

$$= \frac{\cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}$$
$$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha,$$

за $\alpha \neq \pi k$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $k, m \in \mathbf{Z}$, што се заједно може обухватити са $\alpha \neq \frac{\pi l}{2}$, $l \in Z$.

б) $\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \frac{\sin x + 2\sin x\cos x}{\cos x + 2\cos^2 x} = \frac{\sin x(1 + 2\cos x)}{\cos x(1 + 2\cos x)} = \operatorname{tg} x,$

за $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\alpha \neq \frac{4\pi}{3} + 2\pi l$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ када $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

711. Ако се примени формула

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab),$$

добија се

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x)$$
$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

713. Имамо да је $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$, па пошто су α и β оштри углови, то је $\alpha + 2\beta = 45°$.

714. $\operatorname{tg} 5\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + 3\alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$ (1)

Из формула за тангенс двоструког угла следи да је $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$, а из формуле за тангенс троструког угла је $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{11}{2}$. Када се добијене вредности замене у (1) добија се да је $\operatorname{tg} 5\alpha = -\frac{41}{38}$.

715. а) $\frac{11}{16}$; б) $\frac{3\sqrt{15}}{16}$; в) $\frac{11\sqrt{15}}{45}$. **716.** За $x \neq \frac{k\pi}{2}$ израз има вредност 2.

717. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$. Како је $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = a^2 - 1$, следи да је $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}$.

718. а) Из једнакости $\sin 36° = \cos 54°$ или $2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$ добија се $2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3$ одакле $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине по $\sin 18°$ добија се $\sin 18° = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, а пошто је $0° < 18° < 90°$ биће $\sin 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. б) $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

719. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{tg} x \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 3x$ за $\alpha \neq \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}$.

720. Како је $\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha) = \sin^2 60° - \sin^2\alpha$, лева страна идентитета се трансформише у

$$\sin\alpha\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha) = \sin\alpha(\sin^2 60° - \sin^2\alpha)$$
$$= \sin\alpha\left(\frac{3}{4} - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

722. а) Из формуле $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ је $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$, па је

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{2\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{\sin 8\alpha\cos 8\alpha}{8\sin\alpha} = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$$

за $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2}2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\cos 2\alpha}{2}$

или $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha.$

723. Користећи формулу за тангенс разлике два угла, добија се

$$\operatorname{tg}(2\alpha - (\beta - \gamma)) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}(\beta - \gamma)}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(\beta - \gamma)}.$$

За $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{7}$ следи

$$\operatorname{tg}(2\alpha - \beta + \gamma) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = 1 \tag{1}$$

Како је по услову задатка $2\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $-\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\gamma \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, добија се

$$2\alpha - \beta + \gamma \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $2\alpha - \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

724. Коришћењем једнакости из задатка 720. следи:

а) $\sin 20°\sin 40°\sin 80° = \frac{1}{4}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8}$,

б) $\cos 10°\cos 50°\cos 70° = \frac{1}{4}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{8}$,

в) $\operatorname{tg} 6°\operatorname{tg} 54°\operatorname{tg} 66° = \operatorname{tg} 3\cdot 6° = \operatorname{tg} 18°$.

725. а)

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

б)

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

726. а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

727. а) $\sin 15^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

728. Како је $\cos^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, то је $\cos\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, тј. $\sin\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=3-2\sqrt{2}$, тј. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$

729. Када се примени формула $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, добија се

$$\operatorname{tg}7^\circ 30'=\frac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

730. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

731. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{3}.$

732. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-5.$

733. а) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$ за $\alpha\neq 2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},$

б) $4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha,$

в) $\sin\alpha\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{2}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$

г) $\dfrac{\sin 160^\circ}{\cos^4 40^\circ-\sin^4 40^\circ}=\dfrac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{(\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ)(\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ)}=\dfrac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ}=$ $2\sin 80^\circ=2\cos 10^\circ.$

734. а) $\sin^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha$ за $\alpha\in(2\pi k,\pi+\pi+2\pi k),\ k\in\mathbf{Z},$

в) 0, г) $\dfrac{2}{1+\sin\alpha}$ за $\alpha\neq\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

735. а) $-\sin\frac{8x}{3}$; б) $-\sin 3x$; в) $\sin 5x$; г) $\sin x$.

736. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}=\sqrt{\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}=\sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=$

$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right|$ за $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

737. а) Израчунати сваки сабирак посебно.

$$\cos^4\frac{\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2=\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{8}.$$

$$13\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{13}{2},\quad \cos^4\frac{3\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2=\left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{8}.$$

$$\cos^4\frac{5\pi}{8}=\cos^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3-2\sqrt{2}}{8},\quad \cos^4\frac{7\pi}{8}=\cos^4\frac{\pi}{8}=\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$$

Вредност датог израза је

$$2\frac{3+2\sqrt{2}}{8}+\frac{13}{2}+2\frac{3-2\sqrt{2}}{8}=8.$$

б) $\sin\frac{5\pi}{8}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$, па је $2\sin^4\frac{\pi}{8}+2\sin^4\frac{3\pi}{8}=$ $\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2=1+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$

738. $A=\dfrac{2}{5-4\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+3\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\dfrac{2}{5-\dfrac{8z}{1+z^2}+3\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}=\dfrac{2(1+z^2)}{2z^2-8z+8}=$

$\dfrac{1+z^2}{(z-2)^2}$ за $z\neq 2.$

739. Како је по услову задатка $\cos\alpha$ негативан, то је $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3}{5}$. Из $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$, следи $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right)$, па је $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

740. $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{39}}{8}$. За $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$, следи да $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}$.

741. а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$;
б) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$.

742. Из $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = -\frac{3}{5}$ и $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{5}$ добија се $\frac{1}{2+\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{5}{11}$.

743. а) $\operatorname{tg}15^\circ + \operatorname{ctg}15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ \sin 15^\circ}$
$= \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}} = 2.$

744. а) Применом формуле $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ задатак се своди на:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \quad \text{за } \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbf{Z}.$$

г) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$
$= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ за $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

д) $$\frac{1-\sin x}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

за $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Или,

$$\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1-\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

745. Ако се дате тригонометријске функције изразе преко $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ($\operatorname{tg}x \neq \operatorname{ctg}x$) добија се: $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot 2}{1+4} = \frac{4}{5}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}x = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}x = -\frac{3}{4}$, па је $A = \frac{24}{35}$.

746. Користећи формулу $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, добија се

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}} + \frac{1-\dfrac{b}{a+c}}{1+\dfrac{b}{a+c}} + \frac{1-\dfrac{c}{a+b}}{1+\dfrac{c}{a+b}} = 1.$$

747. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\pi - (\alpha+\beta))$
$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$= \sin\alpha(1+\cos\beta) + \sin\beta(1+\cos\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}$
$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$
$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$
$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

748. Ако се $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ изразе преко $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ добија се $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, односно $(\sqrt{7}+2)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + (\sqrt{7}-2) = 0$. Решења једначине су: $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1 = \sqrt{7}-2$, $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$. Како је $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{6}$, треба да буде $0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, па прво решење не долази у обзир. Дакле, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

749. Користећи формуле $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{z^2+1}$, где је $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ добија се $\sin x - \cos x = m \iff \frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{z^2+1} = m \iff (m-1)z^2 - 2z + (m+1) = 0 \iff z = \frac{1 \pm \sqrt{2-m^2}}{m-1}$.

750. Нека је $A=\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}>0$. Тада је $A^2=1+\sin\alpha+2\sqrt{1-\sin^2\alpha}+1-\sin\alpha=2+2|\cos\alpha|=2-2\cos\alpha$ (за $\pi/2<\alpha<\pi$ је $\cos\alpha<0$). Како је $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-2a^2$, то је $A^2=2-2(1-2a^2)=4a^2$, па је $A=\sqrt{4a^2}=2a$.

751.
$$\begin{aligned}&\sqrt{4\cos^4x-6\cos 2x+3}+\sqrt{4\sin^4x+6\cos x+3}\\&=\sqrt{(2\cos^2x)^2-6\cos 2x+3}+\sqrt{(2\sin^2x)^2+6\cos 2x+3}\\&=\sqrt{(1+\cos 2x)^2-6\cos 2x+3}+\sqrt{(1-\cos 2x)^2+6\cos 2x+3}\\&=\sqrt{4-4\cos 2x+\cos^2 2x}+\sqrt{4+4\cos 2x+\cos^2 2x}\\&=\sqrt{(2-\cos 2x)^2}+\sqrt{(2+\cos 2x)^2}=|2-\cos 2x|+|2+\cos 2x|\\&=2-\cos 2x+2+\cos 2x=4.\end{aligned}$$

752. Ако се трансформише лева страна дате једнакости, тада је

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\beta,\qquad\text{односно}$$
$$\sin\alpha(\cos\beta-1)+\sin\beta(\cos\alpha-1)=0\qquad\text{или}$$
$$\sin\alpha(1-\cos\beta)+\sin\beta(1-\cos\alpha)=0.\tag{1}$$

Ако је $\sin\alpha\sin\beta=0$ једнакост важи само кад је $\sin\alpha=\sin\beta=0$. Ако је $\sin\alpha\sin\beta\neq 0$, (1) се може написати у облику $\dfrac{1-\cos\beta}{\sin\beta}=-\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Како је $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, следи $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Из $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, добија се $\dfrac{\beta}{2}=-\dfrac{\alpha}{2}+\pi k$. Дакле, дата једнакост важи за $\alpha=2k\pi$ или $\beta=2k\pi$ или $\alpha+\beta=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

753. а) $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{1}{2}\left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{7\pi}{12}\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sin\pi+\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

в) $4\sin\left(1+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin\left(1+\dfrac{\pi}{6}+1+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(1+\dfrac{\pi}{6}-1-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\sin\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-(-2)\right)-\dfrac{1}{2}\right)=2\cos(-2)-1=2\cos 2-1.$

754. а) $\sin 5x\sin 3x=\dfrac{1}{2}(\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x))=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\cos 8x,$

б)
$$\begin{aligned}&\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3}\\&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{13x}{12}+\cos\frac{5x}{12}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7x}{12}+\cos\frac{x}{12}\right)\\&=\frac{1}{4}\cos\frac{13x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{5x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{7x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{12}.\end{aligned}$$

в) $\dfrac{3}{14}\sin 9x-\dfrac{3}{14}\sin x.$ г) $\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos 12x.$

д) $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{1}{2}\sin 2\beta.$ ђ) $\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\cos(3\alpha+2\beta).$

е) $\dfrac{1}{4}\cos x+\dfrac{1}{4}\cos y+\dfrac{1}{4}\cos(x+y)+\dfrac{1}{4}.$ ж) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha.$

з) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta-\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta+\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos(-2\beta)-\cos\dfrac{\pi}{2}=\cos 2\beta$; и) $2\cos 4\cos 3=\cos(4-3)+\cos(4+3)=\cos 1+\cos 7.$

755. а) $\sin^2x=\sin x\cdot\sin x=\dfrac{1}{2}(\cos 0-\cos 2x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x,$

б) $\cos^2x=\cos x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}(\cos 0+\cos 2x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x,$

в)
$$\begin{aligned}\sin^3x&=\sin^2x\cdot\sin x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin x\\&=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)\\&=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x.\end{aligned}$$

Одавде се добија формула за синус троструког угла:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x.$$

г)
$$\begin{aligned}\cos^3x&=\cos^2x\cdot\cos x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cos x\\&=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos x=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}(\cos 3x+\cos x)\\&=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.\end{aligned}$$

Одавде се добија формула за косинус троструког угла:

$$\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x.$$

д)
$$\begin{aligned}\cos^5x&=\cos^3x\cdot\cos^2x=\left(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\\&=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos x\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 3x\cos 2x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)\\&=\frac{5}{8}\cos x+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 5x.\end{aligned}$$

ђ) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x,$ е) $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x,$ ж) $\dfrac{5}{8}\sin x-\dfrac{6}{16}\sin 3x+\dfrac{1}{16}\sin 5x.$

756. $\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 120°)=\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\sin 30°)=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(2\cos 2\alpha+1).$

758. $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cos 2=\dfrac{1+\cos 6}{2}+\dfrac{1+\cos 2}{2}-\dfrac{1}{2}(\cos 6+\cos 2)=1.$

759. Трансформисати посебно производе синуса и косинуса.

$$\begin{aligned}\sin 20°\sin 40°\sin 80°&=\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 60°)\sin 80°\\&=\frac{1}{2}(\cos 20°\sin 80°-\cos 60°\sin 80°)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 100°+\sin 60°}{2}-\frac{1}{2}\sin 80°\right).\end{aligned}$$

Користећи да је $\sin 100°=\sin 80°$, добија се

$$\sin 20°\sin 40°\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{8}.\tag{1}$$

Даље је

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$$
$$= \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Дакле,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$. **760.** а) $\frac{3}{16}$; б) 3.

762. $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta)}{\frac{1}{2}(\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta)} = \frac{5\sin\beta+\sin\beta}{5\sin\beta-\sin\beta} = \frac{3}{2}$ за $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi l$ и $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi m$, $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

763. а) $1+\cos x = \cos 0^\circ + \cos x = 2\cos\frac{0^\circ + x}{2}\cos\frac{0^\circ - x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}$.

764. а) $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2\sin\frac{20^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{20^\circ-40^\circ}{2} =$ $2\sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$;

б) $\sin 56^\circ - \cos 56^\circ = \sin 56^\circ - \sin 34^\circ = 2\sin\frac{56^\circ-34^\circ}{2}\cos\frac{56^\circ+34^\circ}{2} = 2\sin 11^\circ \cos 45^\circ =$ $\sqrt{2}\sin 11^\circ$;

в) $\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{10} = -2\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{20}$;

г) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}$
$= 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

д) $\sqrt{3}+2\cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\right) =$
$= 4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)$;

ђ) $2\cos\alpha+1 = 2\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2} =$
$4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

765. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2} =$
$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$.

766. а) Како је $1+\sin 2\alpha = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ и $\sin\alpha+\cos\alpha =$ $\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, то је

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

за $\frac{\pi}{4}-\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, односно $\alpha \neq -\frac{\pi}{4}-\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ за $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\alpha-\beta \neq$ πn, $k, n \in \mathbf{Z}$.

767. а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x = (\sin x+\sin 2x)+\sin 2\frac{3x}{2}$
$= 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)$
$= 2\sin\frac{3x}{2}2\cos x\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$;

б) $\sin 20^\circ+\sin 34^\circ+\sin 24^\circ+\sin 30^\circ$
$= 2\sin\frac{20^\circ+34^\circ}{2}\cos\frac{20^\circ-34^\circ}{2}+2\sin\frac{24^\circ+30^\circ}{2}\cos\frac{24^\circ-30^\circ}{2}$
$= 2\sin 27^\circ\cos 7^\circ+2\sin 27^\circ\cos 3^\circ = 2\sin 27^\circ(\cos 7^\circ+\cos 3^\circ)$
$= 2\sin 27^\circ\cdot 2\cos\frac{7^\circ+3^\circ}{2}\cos\frac{7^\circ-3^\circ}{2} = 4\sin 27^\circ\cos 5^\circ\cos 2^\circ$.

768. $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha = (\cos\alpha+\cos 7\alpha)+(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha)$
$= 2\cos\frac{\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-7\alpha}{2}+2\cos\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2}$
$= 2\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos 4\alpha\cos\alpha = 2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha+\cos\alpha)$
$= 2\cos 4\alpha\cdot 2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2} = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$.

769. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2 = \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+$ $\sin^2\beta = 2+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta = 2(1+\cos(\alpha-\beta)) = 2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

770. а) $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha} = \frac{(\sin 3\alpha+\sin\alpha)-2\sin 2\alpha}{(\cos 3\alpha+\cos\alpha)-2\cos 2\alpha}$
$= \frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha-2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha-2\cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\cos\alpha-1)}{2\cos 2\alpha(\cos\alpha-1)}$
$= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$ за $\alpha \neq 2\pi k$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

б) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha} = \frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha+\cos 5\alpha}$
$= \frac{\sin 3\alpha+2\sin 3\alpha\cos(-2\alpha)}{\cos 3\alpha+2\cos 3\alpha\cos(-2\alpha)} = \frac{\sin 3\alpha(1+2\cos 2\alpha)}{\cos 3\alpha(1+2\cos 2\alpha)} = \operatorname{tg} 3\alpha$
за $\alpha \neq \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{3}+n\pi \wedge \alpha \neq \frac{2\pi}{3}+m\pi$ за $k, n, m \in \mathbf{Z}$.

в) $\dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x} = \dfrac{2\sin 3x \cos x - \sin 3x}{2\cos 3x \cos x - \cos 3x} = \dfrac{\sin 3x(2\cos x - 1)}{\cos 3x(2\cos x - 1)} = \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} =$ $\operatorname{tg} 3x$, за $x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

773. б) $1 - \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin x = 2\cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + x}{2}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{2} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) =$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$.

774. a) $1 - 4\cos^2\alpha = 4\left(\dfrac{1}{4} - \cos^2\alpha\right) = 4\left(\cos^2\dfrac{\pi}{3} - \cos^2\alpha\right) = 4\left(\dfrac{1 + \cos 2\pi/3}{2} - \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} - \cos 2\alpha\right) = -4\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sin x + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\cos x = \sin x + \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}} =$

$\dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $3 - 4\sin^2 x = 4\left(\dfrac{3}{4} - \sin^2 x\right) = 4\left(\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2 x\right) = 4(\sin^2 60^\circ - \sin^2 x)$
$= 4(\sin 60^\circ - \sin x)(\sin 60^\circ + \sin x)$
$= 16\cos\dfrac{60^\circ + x}{2}\sin\dfrac{60^\circ - x}{2}\sin\dfrac{60^\circ + x}{2}\cos\dfrac{60^\circ - x}{2}$
$= 4\cdot 2\sin\dfrac{60^\circ + x}{2}\cos\dfrac{60^\circ + x}{2}\cdot 2\sin\dfrac{60^\circ - x}{2}\cos\dfrac{60^\circ - x}{2}$
$= 4\sin 2\dfrac{60^\circ + x}{2}\sin 2\dfrac{60^\circ - x}{2} = 4\sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x)$;

г) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \dfrac{1 - \cos 2\beta}{2} = \dfrac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}$
$= \dfrac{2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{2} = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$;

д) $1 - \sin\alpha + \cos\alpha = (1 + \cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$
$= 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$
$= 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

ђ) $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = \dfrac{2\sin 90^\circ}{\sin 80^\circ} =$ $\dfrac{2}{\sin 80^\circ} = \dfrac{2}{\cos 10^\circ}$;

е) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\alpha}$ за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

775. a) $\sec 7^\circ(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ)$
$= \sec 7^\circ(2\sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2\sin 18^\circ \cos 7^\circ) = 2\sin 54^\circ - 2\sin 18^\circ = 4\cos 36^\circ \sin 18^\circ$

$= \dfrac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \dfrac{2\cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = 1.$

б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ)$
$= \dfrac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \dfrac{1}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} = \dfrac{2}{\sin 18^\circ} - \dfrac{2}{\sin 54^\circ} = \dfrac{2\cdot 2\sin 18^\circ \sin 54^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4.$

в) $4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 4(\cos 20^\circ \cos^2 20^\circ + \cos 40^\circ \cos^2 40^\circ)$
$= 4\left(\cos 20^\circ\dfrac{1 + \cos 40^\circ}{2} + \cos 40^\circ\dfrac{1 + \cos 80^\circ}{2}\right)$
$= 2(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 40^\circ \cos 80^\circ)$
$= 2\left(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dfrac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) + \dfrac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)\right)$
$= 3(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) = 6\cos 30^\circ \cos 10^\circ = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$

г) $\cos(54^\circ - \alpha) - \cos(18^\circ - \alpha) - \cos(54^\circ + \alpha) + \cos(18^\circ + \alpha)$
$= \big(\cos(54^\circ - \alpha) - \cos(54^\circ + \alpha)\big) - \big(\cos(18^\circ - \alpha) - \cos(18^\circ + \alpha)\big)$
$= 2\sin 54^\circ \sin\alpha - 2\sin 18^\circ \sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot 2\cos 36^\circ \sin 18^\circ$
$= \dfrac{2\sin\alpha\cdot 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \dfrac{2\sin\alpha\cdot\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$
$= \dfrac{\sin\alpha \sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \dfrac{\sin\alpha \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \sin\alpha.$

д) $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin^3\alpha\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^3\alpha\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}$
$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, за $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

776. Видети решење задатка 694. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos 2\alpha\right)} = 2\operatorname{tg} 2\alpha = 6.$

777. $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$
$+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta + \cos(\alpha - \beta)(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$
$= \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \dfrac{1 - \cos 2\beta}{2} + \cos^2(\alpha - \beta) - \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \cos^2(\alpha - \beta).$

778. Како је $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma$, тада је $-\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Даље је $-\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$, или $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

779. Дати идентитет може се написати у облику

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 0 \qquad \text{или}$$
$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} - \frac{\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = 0.$$

Даље је

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\gamma\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = 0,$$

односно

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=0.$$

Тражени услови добијају се из последње једнакости. Разломак ће бити једнак нули када је именилац различит од нуле, а бројилац једнак нули, дакле, за $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ и $\alpha,\beta,\gamma\neq\frac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$.

781. $-\frac{33}{65}$. **782.** $-\frac{1}{4}$. **783.** $\operatorname{tg}\alpha=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

784. $\frac{2\cos40^\circ-\cos20^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\cos40^\circ+\cos40^\circ-\cos20^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\cos40^\circ-2\sin30^\circ\sin10^\circ}{\sin20^\circ}$
$=\frac{\cos40^\circ-\sin10^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\sin50^\circ-\sin10^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{2\cos30^\circ\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=\sqrt{3}.$

785. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=$
$\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\right)^2+1+\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\right)^2=15.$

786. Из услова задатка је $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$. Даље је

$$\begin{aligned}(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)&=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\\&=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=(1+\operatorname{tg}\alpha)\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}=2.\end{aligned}$$

787. Како је $\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin3\alpha}{4}$ и $\cos^3\alpha=\frac{\cos3\alpha+3\cos\alpha}{4}$, добија се

$$\begin{aligned}&\sin3\alpha\cos^3\alpha+\sin^3\alpha\cos3\alpha\\&\quad=\sin3\alpha\frac{\cos3\alpha+3\cos\alpha}{4}+\cos3\alpha\frac{3\sin\alpha-\sin3\alpha}{4}\\&\quad=\frac{3}{4}(\sin3\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos3\alpha)=\frac{3}{4}\sin4\alpha.\end{aligned}$$

790. $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha=2+\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}+\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=2+\frac{1}{\sin2\alpha\cos2\alpha}$
$=\frac{\sin4\alpha+1}{\sin2\alpha\cos2\alpha}=\frac{2(\sin4\alpha+1)}{\sin4\alpha}=\frac{2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)}{\sin4\alpha}=\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin4\alpha},$
за $\sin4\alpha\neq0 \iff 4\alpha\neq\pi k \iff \alpha\neq\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

791. $\frac{\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$
$=\frac{2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Како је $\sin(\alpha+\beta)=\cos\gamma$ и $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$, коначно је $\frac{4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=4.$

792. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=-\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$

793. а) $\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, одакле је
$\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)=0$, тј. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, па је $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}$, односно $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

б) Ако у дату једнакост уведемо $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, добијамо:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha+\beta)} \iff \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos(\beta-\alpha)}{2\sin\beta\cos\alpha}\\&\iff 2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta), \quad \text{за } \cos\alpha\neq0 \iff \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Применом адиционе теореме на $\cos(\alpha-\beta)$ последња једнакост се своди на $\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha=0$, тј. $\cos(\alpha+\beta)=0$ одакле је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, према томе $\gamma=\frac{\pi}{2}$ и троугао је правоугли.

796. $\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$
$\iff \sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)$
$\iff \sin(\alpha-\beta)=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\iff \sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
$\iff \sin(\alpha-\beta)(1-\sin(\alpha+\beta))=0$
$\iff \sin(\alpha-\beta)=0\vee\sin(\alpha+\beta)=1.$
1° Из $\sin(\alpha-\beta)=0$ следи $\alpha=\beta$. Троугао је једнакокраки.
2° За $\sin(\alpha+\beta)=1$ следи $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Троугао је правоугли.

797.
$$\begin{aligned}q&=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\\&=\sin^2(\pi-(\beta+\gamma))+\frac{1-\cos2\beta}{2}+\frac{1-\cos2\gamma}{2}\\&=\sin^2(\beta+\gamma)+1-\frac{1}{2}(\cos2\beta+\cos2\gamma)\\&=1-\cos^2(\beta+\gamma)+1-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)\\&=2-\cos(\beta+\gamma)(\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma))\\&=2-\cos(\pi-\alpha)\cdot2\cos\beta\cos\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \qquad \text{тј.}\\&\qquad\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{q-2}{2}.\end{aligned}$$

1° Ако је $q=2$, онда је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$ тј. један од углова троугла износи 90°, па је троугао правоугли.

2° Ако је $q<2$, онда је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0$, тј. један од улова троугла је туп, па је троугао тупоугли (троугао може имати само један туп угао, тј. косинус само једног угла може бити негативан).

3° Ако је $q>2$, онда је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>0$, тј. сви углови троугла су оштри, па је троугао оштроугли.

798. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

799. а) $a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right) = a(1+\operatorname{tg}\varphi) = a\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi\right) = \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}$;

б) $a^2+b^2 = a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = \frac{a^2}{\cos^2\varphi}$.

800. Ако су $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ означене редом са a, b, c долази до једнакости

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=0. \tag{1}$$

Једнакост (1) се може трансформисати:

$$\frac{(a-c)(1+b^2)}{(1+ab)(1+bc)}+\frac{c-a}{1+ca}=0, \qquad \frac{(a-c)(c-b)(b-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=0.$$

Према томе, биће бар два од бројева a, b, c међусобно једнака, дакле, бар два угла троугла су међусобно једнака.

801. Ако се $\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$ реши по $\cos x$, добија се $\cos x=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$. Када се добијена вредност за $\cos x$ замени у $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ следи

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}}{1+\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

за $1+\cos\alpha\cos\beta\neq 0$ и $x\neq 2\pi k$, $\alpha\neq 2\pi l$ и $\beta\neq 2\pi(m+1)$, $k, l, m\in\mathbf{Z}$.

802. а) $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$. Како је $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, постоји тачно један угао φ за који је $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Даље је $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)$, односно $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.

б) Ако је $a=1$, $b=-1$, тада је $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ и $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

803. Када се у формули $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ замени $a=4$, $b=3$ а φ добије из система

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

тада је $\sin\varphi=\frac{3}{5}$ и $\cos\varphi=\frac{4}{5}$, односно $4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\sin(\alpha+\varphi)$ где је $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{3}{4}$, $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Дакле, $4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\sin\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

804. Како је $z=\pi-(x+y)$, то је $\sin z=\sin(\pi-(x+y))$. Даље је

$$\sin x+\sin y+\sin z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}2\cos\frac{\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}}{2}\cos\frac{\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{2}}{2}$$

$$=4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}.$$

Из $x+y+z=\pi$, следи $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi-z}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}$, одакле је $\sin\frac{x+y}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)=\cos\frac{z}{2}$. Коначно

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

805. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$. Применом формуле $\sin\psi=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}$ имамо: $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$. **806.** $\frac{1}{2}$.

807. $\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}35^\circ\operatorname{tg}25^\circ\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{ctg}35^\circ\operatorname{ctg}25^\circ}=\frac{\operatorname{tg}3\cdot5^\circ}{\operatorname{tg}(60^\circ-5^\circ)\operatorname{tg}(60^\circ+5^\circ)}$

$$=\frac{\dfrac{3\operatorname{tg}5^\circ-\operatorname{tg}^3 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}}{\dfrac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}5^\circ}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}5^\circ}\dfrac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}5^\circ}}=\frac{\dfrac{3\operatorname{tg}5^\circ-\operatorname{tg}^3 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}}{\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}}=\operatorname{tg}5^\circ.$$

808. *Упутство*: $125^\circ=360^\circ-(117^\circ+118^\circ)$.

809. а) 0; б) $\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\pi}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

811. Ако се посебно трансформише сваки сабирак, добија се

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$
$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$$

Следи $\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}\left(\left|\sin\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)$. Даља трансформација зависи од тога у ком се квадранту налази угао $\frac{x}{2}$. Могући су следећи случајеви:

1° Ако $x \in [4\pi k, \pi(4k+1)]$, за $k \in \mathbf{Z}$ тада се $\frac{x}{2}$ налази у првом квадранту, па је

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

2° Ако $x \in [\pi(4k+1), \pi(4k+2)]$ за $k \in \mathbf{Z}$, тада се $\frac{x}{2}$ налази у другом квадранту, па је

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

3° Ако се $x \in [\pi(4k+2), \pi(4k+3)]$, за $k \in \mathbf{Z}$, тада се $\frac{x}{2}$ налази у трећем квадранту, па је

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x} = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

4° Ако $x \in [\pi(4k+3), \pi(4k+4)]$, за $k \in \mathbf{Z}$, тада се $\frac{x}{2}$ налази у четвртом квадранту, па је

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

813. Видети решење задатка 817.

816. $\sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

817. Када се из услова задатка $\cos\beta = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ замени у формулу $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$, добија се

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha-\cos\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma} = \frac{-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

за $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $\beta \neq \pi+2\pi n$, $\alpha+\gamma \neq \frac{\pi}{2}+\pi l$ и $\alpha-\gamma \neq \frac{\pi}{2}+\pi m$, $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

818. $\sin 10° + \sin 20° + \sin 30° + \sin 40° + \sin 50°$
$= \frac{1}{\sin 5°}(\sin 5°\sin 10° + \sin 5°\sin 20° + \sin 5°\sin 30°$
$+ \sin 5°\sin 40° + \sin 5°\sin 50°) = \frac{1}{2\sin 5°}(\cos 5° - \cos 15°$
$+ \cos 15° - \cos 25° + \cos 25° - \cos 35° + \cos 35° - \cos 45° + \cos 45° - \cos 55°)$
$= \frac{\cos 5° - \cos 55°}{2\sin 5°} = \frac{1}{2}\sin 25° \operatorname{cosec} 5°.$

819. $$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}. \qquad (1)$$

Из (1) и $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$ добија се $\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$, одакле је $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, или $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

820.
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$
$$+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

За $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, односно $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}$, добијамо

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}-\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = 1.$$

821.
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1.$$

826. $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = 2\sin n(\alpha+\beta)\cos n(\alpha-\beta) + 2\sin n\gamma\cos n\gamma$
$= 2\sin n(\pi-\gamma)\cos n(\alpha-\beta) + 2\sin n\gamma\cos n(\pi-(\alpha+\beta))$
$= 2\sin(n\pi-n\gamma)\cos n(\alpha-\beta) + 2\sin n\gamma\cos(n\pi-n(\alpha+\beta))$
$= 2(-1)^{n+1}\sin n\gamma(\cos n(\alpha-\beta)-\cos n(\alpha+\beta))$
$= (-1)^{n+1}4\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma.$

827. а) $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$; б) $T = 14\pi$; в) $T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5}$.

828. Нека је функција периодична са периодом T. Тада је

$$\begin{aligned} &a\sin(b(x+T)+\varphi) = a\sin(bx+\varphi)\\ \iff\ &a\sin(b(x+T)+\varphi) - a\sin(bx+\varphi) = 0\\ \iff\ &2\sin\frac{bT}{2}\cos\left(bx+\varphi+\frac{bT}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Чинилац $\cos\left(bx+\varphi+\dfrac{bT}{2}\right)$ садржи x и није идентички једнак нули. Како је $T \neq 0$ константа, мора бити $\sin\dfrac{bT}{2} = 0$, одакле је $\dfrac{bT}{2} = nk \iff T = \dfrac{2\pi k}{b}$, за $k \in \mathbf{Z}$, па је основни период функције $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$.

829. а) Основни периоди функција $f(x) = \sin 2x$ и $f(x) = \sin 5x$ су $T = \pi = 5\cdot\dfrac{\pi}{5}$ и $T = 2\dfrac{\pi}{5}$. Најмањи заједнички садржалац за 5 и 2 је 10, па је основни период функције $T = 2\cdot 5\cdot\dfrac{\pi}{5}$.

б) Основни периоди функције $\sin\dfrac{3x}{7}$, $\cos\dfrac{x}{3}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{2x}{5}$ су редом $\dfrac{14\pi}{3}$, 6π и $\dfrac{5\pi}{2}$. Добијени периоди се могу написати у облику $\dfrac{28\pi}{6}$, $\dfrac{36\pi}{6}$ и $\dfrac{15\pi}{6}$. Најмањи заједнички садржалац бројева 28, 36 и 15 је 1260. Основни период дате фукције је $T = 1260\dfrac{\pi}{6} = 210\pi$.

д) $f(x) = 2\operatorname{tg}\left((3x+\pi)-\dfrac{1}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\left(3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{2}\right)$, $T = \dfrac{\pi}{3}$.

ђ) $f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}+\pi+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}(x+2\pi)+\dfrac{1}{2}\right)$, $T = 2\pi$.

830. а) $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, $f(\pi) = 0$ б) $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(\pi) = -\dfrac{1}{2}$;

в) $f(0) = 1$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ није дефинисано, $f(\pi) = 1$;

г) $f(0)$ и $f(\pi)$ није дефинисано, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

831. За $x = 0$ функција није дефинисана. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2+\sqrt{2}$.

832. а) $f(-x) = \dfrac{\operatorname{tg}(-x)+\sin(-x)}{\operatorname{ctg}(-x)} = \dfrac{-\operatorname{tg}x-\sin x}{-\operatorname{ctg}x} = \dfrac{\operatorname{tg}x+\sin x}{\operatorname{ctg}x}$.

Функција је парна. За $x = \dfrac{\pi l}{2}$, $l \in \mathbf{Z}$, функција није дефинисана.

б) $f(-x) = \sin(-x)+\operatorname{cosec}(-x) = -\sin x-\operatorname{cosec}x = -(\sin x+\operatorname{cosec}x)$, за $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, функција је непарна.

в) $f(-x) = \sin(-x)-\cos(-x) = -\sin x-\cos x$. Како није испуњен ни један од услова $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$, функција није ни парна, ни непарна.

833. Функцију трансформисати у облик

$$y = 2\left(\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x\right) = 2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right).$$

$y_{\max} = 2$ за $x = \dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. $y_{\min} = -2$ за $x = -\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

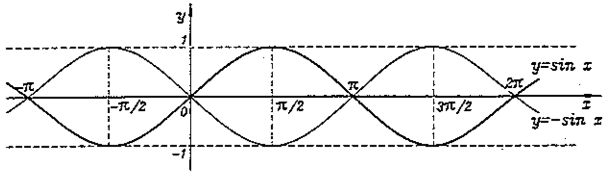
834. а) $f(x) = \sin x+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Функција ће имати максимум $\sqrt{2}$ ако је $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, тј. $x = \dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Функција ће имати минимум $-\sqrt{2}$ ако је $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$, то јест $x = \dfrac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

835. а) $y_{\min} = 1$ за $x = \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k$, $y_{\max} = 3$ за $x = \dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$;

б) $y_{\min} = 4$ за $x = 2\pi k$, $y_{\max} = 6$ за $x = \pi(2n+1)$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

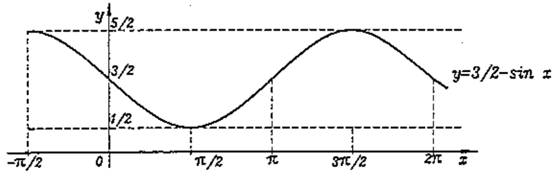
836. Функцију трансформисати у облик $y = -2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\dfrac{\pi}{8}$. Даље је $y_{\min} = -2\sin\dfrac{\pi}{8}$ за $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right) = 1$, тј. за $x+\dfrac{\pi}{8} = 2\pi k$, односно $x = -\dfrac{\pi}{8}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

837. График је приказан на сл. 39.



Сл. 39

838. График је приказан на сл. 40.



Сл. 40

839. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, +\infty)$.

2° Основни период $T = \pi$.

3° $y = 0$ за $x = \dfrac{\pi k}{2}-\dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

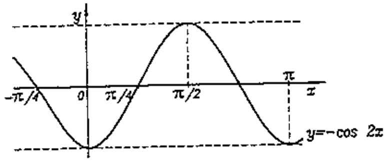
4° $y_{\max} = 1$ за $x = \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $y_{\min} = -1$ за $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5° $y > 0$ за $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \dfrac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y < 0$ за $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6° Расте за $x \in \left(\pi k, \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{5\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

7° График је приказан на сл. 41.



Сл. 41

840. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$. Амплитуда је $a = 1$, фреквенција $b = 2$.

2° Основни период је $T = \dfrac{2\pi}{|b|} = \pi$.

3° График се налази између правих $y = 1$ и $y = -1$, то јест $-1 \leq \sin 2x \leq 1$.

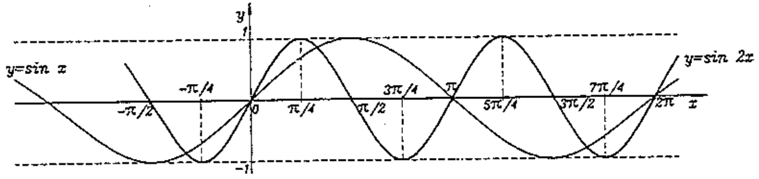
4° $y = 0$ кад је $\sin 2x = 0 \iff x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Нуле у основном периоду су $x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$.

5° $\max(\sin 2x) = 1$ за $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \iff x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $\min(\sin 2x) = -1$ за $2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \iff x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Координате максимума у основном периоду су $M\left(\dfrac{\pi}{4}, -1\right)$, а координате минимума $N\left(\dfrac{3\pi}{4}, -1\right)$.

6° $\sin 2x > 0$ за $x \in \left(\pi k, \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. $\sin 2x < 0$ за $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном интервалу функција је позитивна за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а негативна за $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

7° Расте за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \dfrac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном интервалу функција расте за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, односно $x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$, а опада за $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

8° График је приказан на сл. 42.



Сл. 42

841. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$. Амплитуда је $a = 1$, фреквенција $b = \dfrac{1}{2}$.

2° Основни период је $T = \dfrac{2\pi}{|b|} = 4\pi$.

3° График се налази између правих $y = 1$ и $y = -1$, то јест $-1 \leq \sin \dfrac{x}{2} \leq 1$.

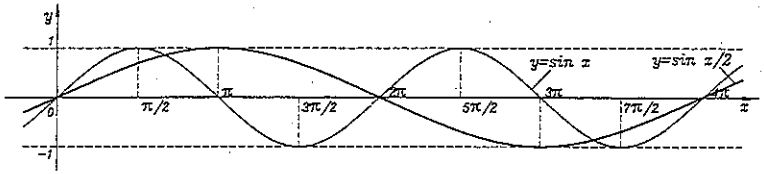
4° $y = 0$ за $\sin \dfrac{x}{2} = 0$, тј. $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Нуле у основном периоду су $x = 0, 2\pi, 4\pi$.

5° $\max\left(\sin \dfrac{x}{2}\right) = 1$ за $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, тј. $x = \pi + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду синус има једну максималну (и једну минималну) вредност, па за $k = 0$ следи $x = \pi$. $\min\left(\sin \dfrac{x}{2}\right) = -1$ за $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$, тј. $x = 3\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Координате максимума су $M(\pi, 1)$. Координате минимума $N(3\pi, -1)$.

6° $\sin \dfrac{x}{2} > 0$ за $x \in (4\pi k, 2\pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. $\sin \dfrac{x}{2} < 0$ за $x \in (2\pi + 4\pi k, 4\pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном интервалу функција је позитивна за $x \in (0, 2\pi)$, а негативна за $x \in (2\pi, 4\pi)$.

7° Расте за $x \in (-\pi + 4\pi k, \pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in (\pi + 4\pi k, 3\pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду функција расте за $x \in (0, \pi)$, односно $x \in (3\pi, 4\pi)$, а опада за $x \in (\pi, 3\pi)$.

8° График је приказан на сл. 43.



Сл. 43

842. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$.

2° Основни период $T = 2\pi$.

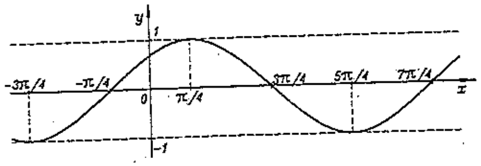
3° $y = 0$ за $x = \pi k - \dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4° $y_{\max} = 1$ за $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $y_{\min} = -1$ за $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5° $y > 0$ за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
$y < 0$ за $x \in \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6° Расте за $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

7° График је приказан на сл. 44.



Сл. 44

843. а) 1° Дефинисана за $x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

2° Има вертикалне асимптоте $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

3° Основни период $T = 2\pi$.

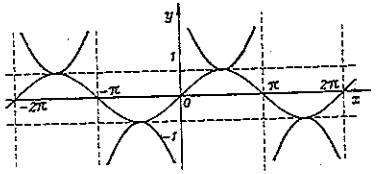
4° Непарна је, тј. $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$.

5° Нема реалних нула.

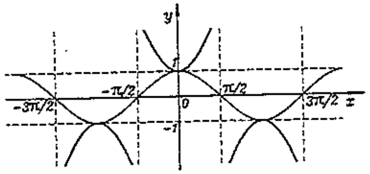
6° $y > 0$ за $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z}$. $y < 0$ за $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z}$.

7° Расте за $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right)$, односно $x \in \left(\pi + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left[2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, односно $x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

8° График је приказан на сл. 45.



Сл. 45



Сл. 46

б) 1° Дефинисана за $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

2° Има вертикалне асимптоте $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

3° Основни период $T = 2\pi$.

4° Парна је, тј. $\sec(-x) = \sec x$.

5° Нема реалних нула.

6° $y > 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y < 0$ за $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

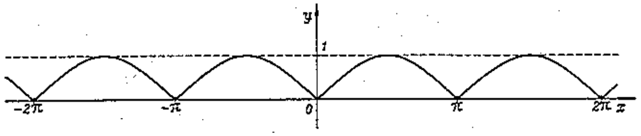
7° Расте за $x \in \left[2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, односно $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left[\pi + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, односно $x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

8° График је приказан на сл. 46.

844. а) 1° $y = \sin x$ за $\sin x \geq 0$.

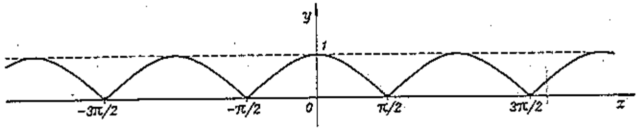
2° $y = -\sin x$ за $\sin x < 0$.

График је приказан на сл. 47.



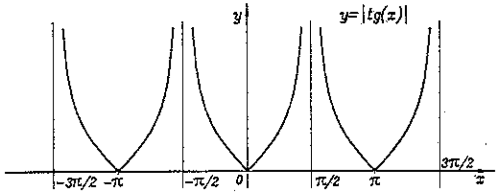
Сл. 47

б) $y = \begin{cases} \cos x & \text{за } \cos x \geq 0, \\ -\cos x & \text{за } \cos x < 0 \end{cases}$ (сл. 48).



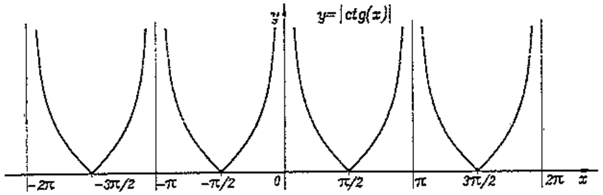
Сл. 48

845. а) $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{за } \operatorname{tg} x \geq 0, \\ -\operatorname{tg} x & \text{за } \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$ (сл. 49).



Сл. 49

б) $y = \begin{cases} \operatorname{ctg} x & \text{за } \operatorname{ctg} x \geq 0, \\ -\operatorname{ctg} x & \text{за } \operatorname{ctg} x < 0 \end{cases}$ (сл. 50).



Сл. 50

846. а) $\min|\sin x| = 0$ за $x = \pi k$, $\max|\sin x| = 1$ за $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$. За те вредности променљиве x дата функција има екстремне вредности $y_{\min} = 1$ и $y_{\max} = 4$.
б) Функција достиже минимум када израз $2 - |\cos x|$ има максимум. Функција достиже максимум када израз $2 - |\cos x|$ има минимум. Дакле, $y_{\min} = \frac{1}{2}$ за $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y_{\max} = 1$ за $x = \pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

847. Ако се стави да је $p = a\sin\varphi$, $q = a\cos\varphi$, тада је $f(x) = a\sin\varphi\cos bx + a\cos\varphi\sin bx = a\sin(bx+\varphi)$, односно $f(x) = \sqrt{p^2+q^2}\sin(bx+\varphi)$. Амплитуда је $a = \sqrt{p^2+q^2}$, а основни период $T = \frac{2\pi}{|b|}$. (Видети задатак 828).

848. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$, амплитуда је 2, фреквенција $\frac{4}{3}$, почетна фаза $\frac{\pi}{3}$, померај фазе $-\frac{\pi}{4}$.

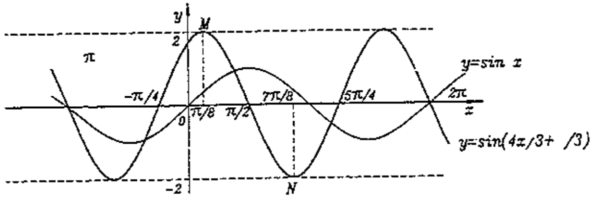
2° Основни период $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{3\pi}{2}$. График се налази између правих $y = 2$ и $y = -2$, то јест $-2 \le 2\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) \le 2$.

4° $y = 0$ кад је $\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, тј. $x = \frac{3\pi k}{4} - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Нуле у основном периоду су $x = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$.

5° $y_{\max} = 2$ за $\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, тј. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y_{\min} = -2$ за $\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, тј. $x = \frac{7\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Координате максимума у основном периоду су $M\left(\frac{\pi}{8}, 2\right)$, а минимума $N\left(\frac{7\pi}{8}, -2\right)$.

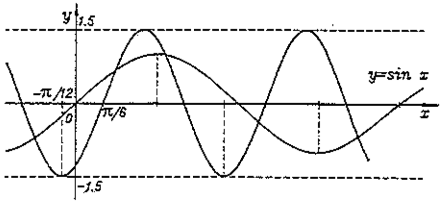


Сл. 51

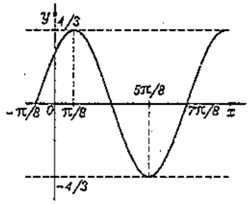
6° $y > 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y < 0$ за $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}, \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду функција је позитивна за $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, а негативна за $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

7° Расте за $x \in \left(-\frac{5\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}, \frac{7\pi}{8} + \frac{3\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду расте за $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right)$, односно $x \in \left(\frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}\right)$, а опада за $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$. График је приказан на сл. 51.

849. 1° Амплитуда је $\frac{3}{2}$, фреквенција 2, почетна фаза $-\frac{\pi}{3}$, померај $\frac{\pi}{6}$, дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$.
2° Основни период $T = \pi$.
3° $-\frac{3}{2} \le \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{3}{2}$.
4° $y = 0$ кад је $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, тј. $2x - \frac{\pi}{3} = \pi k \iff 2x = \frac{\pi}{3} + \pi k \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. За $k = 0$ су три узастопне нуле у основном периоду $x = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$.
5° $y_{\max} = \frac{3}{2}$ за $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, тј. $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. За $k = 0$ у основном периоду максимум је за $x = \frac{5\pi}{12}$. $y_{\min} = -\frac{3}{2}$ за $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, тј. $x = \frac{11\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. За $k = 0$ у основном периоду минимум је за $x = \frac{11\pi}{12}$.
6° $y > 0$ за $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду $y > 0$ за $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $y < 0$ за $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + \pi k, \frac{7\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду $y < 0$ за $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$.
7° Расте за $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left(\frac{5\pi}{12} + \pi k, \frac{11\pi}{12} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. У основном периоду расте за $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$, а опада за $x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$.
8° График је приказан на сл. 52.



Сл. 52



Сл. 53

850. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$.
2° Основни период $T = \pi$.
3° $y = 0$ за $x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.
4° $y_{\max} = \frac{4}{3}$ за $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
$y_{\min} = -\frac{4}{3}$ за $x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5° $y > 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \pi k, \frac{3\pi}{8} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y < 0$ за $x \in \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k, \frac{7\pi}{8} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6° Расте за $x \in \left(-\frac{3\pi}{8} + \pi k, \frac{\pi}{8} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Опада за $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi k, \frac{5\pi}{8} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
График је приказан на сл. 53.

851. 1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$.

2° Основни период $T = 4\pi$.

3° $y = 0$ за $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4° $y_{\max} = 2$ за $x = \frac{8\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $y_{\min} = -2$ за $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

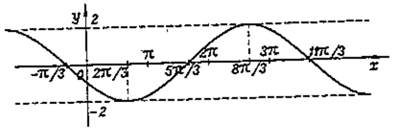
5° $y > 0$ за $x \in \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi k, \frac{11\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y < 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi k, \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

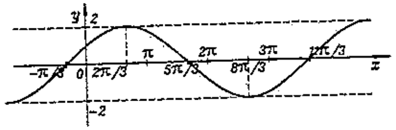
6° Расте за $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \frac{8\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Опада за $x \in \left(\frac{8\pi}{3} + 4\pi k, \frac{14\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

7° График функције је приказан на сл. 54.



Сл. 54



Сл. 55

852. Како је $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$, то се дата функција своди на функцију

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right).$$

1° Дефинисана за $x \in (-\infty, \infty)$.

2° Основни период $T = 4\pi$.

3° $y = 0$ за $x = 2\pi k - \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4° $y_{\max} = 2$ за $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $y_{\min} = -2$ за $x = \frac{8\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

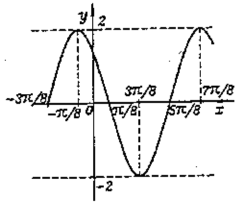
5° $y > 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi k, \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$y < 0$ за $x \in \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi k, \frac{11\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

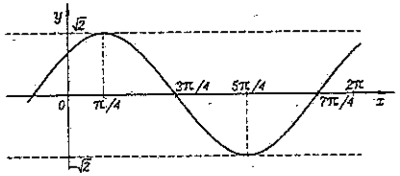
6° Расте за $x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 4\pi k, \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right)$. Опада за $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \frac{8\pi}{3} + 4\pi k\right)$.

7° График је приказан на сл. 55.

853. График је приказан на сл. 56.



Сл. 56



Сл. 57

854. Дату функцију трансформисати у облик

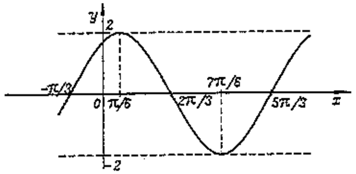
$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

855. Дату функцију трансформисати у облик

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

856. $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (сл. 57).

857. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. График је приказан на сл. 58.



Сл. 58

858. а) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Основни период је $T = \pi$.

б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x \cdot 2\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin x\sin 2x = \frac{1}{4}(\cos x - \cos 3x)$. Основни периоди функција $f(x) = \cos x$ и $f(x) = \cos 3x$ су 2π и $\frac{2\pi}{3}$, а како је 2π период и функције $f(x) = \cos 3x$, он ће представљати период дате функције.

в) $f(x) = \sin x \sin^2 x = \sin x \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2}(\sin x - \sin x \cos 2x) =$ $\dfrac{1}{2}\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\left(\sin 3x - \sin x\right)\right) = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$. Заједнички период функција $\sin x$ и $\sin 3x$ je $T = 2\pi$, што представља и период дате функције.

г) $f(x) = \cos^4 x = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \dfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \dfrac{1+\cos 4x}{2}\right) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 4x$. Функција $f(x) = \cos 2x$ има период $T = \pi$, а функција $f(x) = \cos 4x$ период $T = \dfrac{\pi}{2}$. Њихов заједнички период je $T = \pi$ што представља период дате функције.

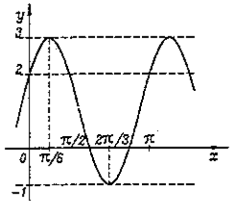
д) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$. Период je $T = \dfrac{\pi}{2}$.

ђ) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$. Период je $T = \dfrac{\pi}{2}$.

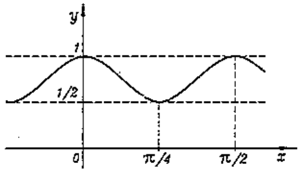
е) Дату функцију представити у облику $|\sin x| = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$. Како je свака функција периодичне функције периодична, то je период дате функције $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

ж) $T = \pi$.

859. а)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 1 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right) \\ &= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1. \qquad \text{(сл. 59)} \end{aligned}$$



Сл. 59

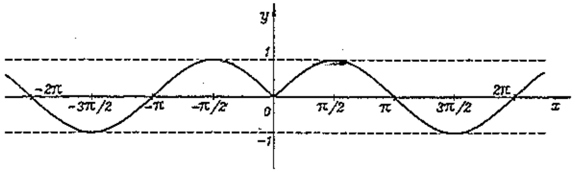


Сл. 60

б) Трансформисати дату функцију у облик
$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x. \end{aligned}$$

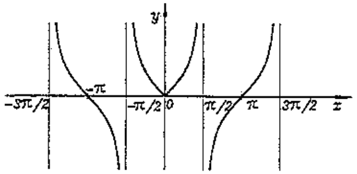
График je приказан на сл. 60.

860. а) $y = \sin|x| = \begin{cases} \sin x & \text{за } x \geq 0, \\ -\sin x & \text{за } x < 0 \end{cases}$ (сл. 61).



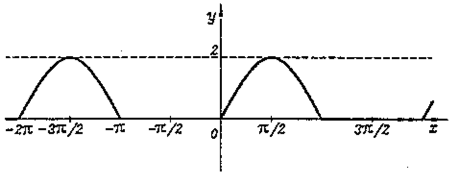
Сл. 61

б) $y = \operatorname{tg}|x| = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{за } x \geq 0, \\ -\operatorname{tg} x & \text{за } x < 0 \end{cases}$ (сл. 62).

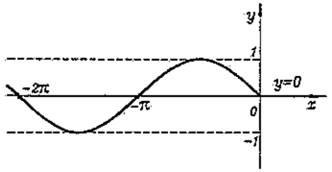


Сл. 62

861. График je приказан на сл. 63.



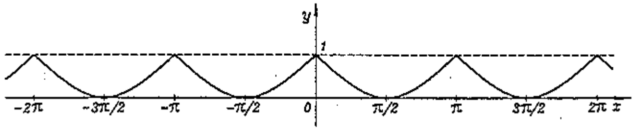
Сл. 63



Сл. 64

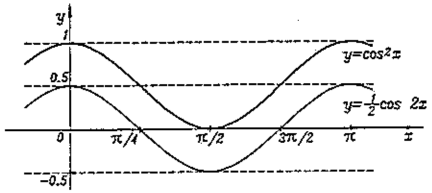
862. $f(x) = \sin\dfrac{|x|-x}{2} = \begin{cases} 0 & \text{за } x \geq 0, \\ -\sin x & \text{за } x < 0. \end{cases}$ (сл. 64).

863. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 2|\sin x| + 1} = \sqrt{(1-|\sin x|)^2} = |1 - |\sin x|| = 1 - |\sin x|$ (сл. 65).



Сл. 65

864. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ (сл. 66).



Сл. 66

865. $f(x) = 2$ ако и само ако је $x = 0$, па следи да функција није периодична.

866. Ако је 3π период функције тада је за свако x

$$\cos n(x+3\pi)\sin\frac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx \sin\frac{5}{n}x.$$

За $x = 0$ добија се

$$\cos 3n\pi \sin\frac{5}{n}3\pi = 0.$$

Ако је n цео број тада $\cos 3n\pi \neq 0$ па је $\sin\frac{15\pi}{n} = 0$. Једначина $\sin\frac{15\pi}{n} = 0$ је задовољена за све целобројне вредности n који су делиоци броја 15, па је $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

867. Претпоставимо да је $f(x)$ периодична функција са периодом T. Тада је, за свако x,

$$\cos(ax + aT) + \cos(x+T) = \cos ax + \cos x. \tag{1}$$

Ако се у (1) стави $x = 0$ добија се

$$\cos aT + \cos T = 2,$$

одакле следи $\cos aT = \cos T = 1$, односно $aT = 2k\pi$, $T = 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Тада је $a = \frac{k}{l}$ рационалан број. Обратно, претпоставимо да је $a = \frac{k}{l}$ рационалан број. Тада је $f(x)$ периодична функција јер је (1) испуњено за $T = 2l\pi$.

868. Ако је функција периодична с периодом T тада је

$$\cos(x+T) + \cos a_1(x+T) + \cos a_2(x+T) + \cdots + \cos a_n(x+T)$$
$$= \cos x + \cos a_1 x + \cos a_2 x + \cdots + \cos a_n x,$$

одакле је

$$\big(\cos(x+T) - \cos x\big) + \big(\cos a_1(x+T) - \cos a_1 x\big) + \cdots + \big(\cos a_n(x+T) - \cos a_n x\big) = 0.$$

Како добијена једнакост треба да важи за свако x, она важи и за $x = 0$, па је

$$-(1-\cos T) - (1 - \cos a_1 T) - \cdots - (1 - \cos a_n T) = 0,$$

односно

$$2\sin^2\frac{T}{2} + 2\sin^2\frac{a_1 T}{2} + \cdots + 2\sin^2\frac{a_n T}{2} = 0.$$

Како су сви сабирци на десној страни позитивни, то је

$$\sin\frac{T}{2} = \sin\frac{a_1 T}{2} = \cdots = \sin\frac{a_n T}{2} = 0.$$

Из добијених једначина, даље је

$$T = 2\pi k, \quad a_1 T = 2\pi k_1, \quad \ldots, \quad a_n T = 2\pi k_n,$$

где су $k, k_1, \ldots, k_n$ цели бројеви, па је

$$a_1 = \frac{k_1}{k}, \quad a_2 = \frac{k_2}{k}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{k_n}{k},$$

одакле следи да су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рационални бројеви.

869. а) $f(x) = a\frac{1-\cos 2x}{2} + b\frac{\sin 2x}{2} + c\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\big(a+c+b\sin 2x + (c-a)\cos 2x\big)$. Када се примени формула $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ на израз $b\sin 2x + (c-a)\cos 2x$, добија се

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = \sqrt{b^2+(c-a)^2}\sin(2x+\varphi)$$

где се φ одређује из система

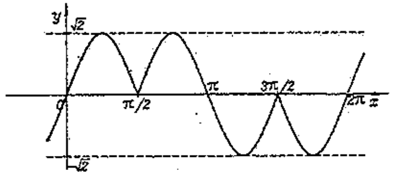
$$\sin\varphi = \frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}.$$

Дакле, $f(x) = \frac{1}{2}\Big(a + c + \sqrt{b^2+(c-a)^2}\sin(2x+\varphi)\Big)$. Како добијена функција има максимум и минимум једновремено када и функција $\sin(2x+\varphi)$, то за $\sin(2x+\varphi) = -1$ дата функција има минимум $f(x) = \frac{1}{2}(a+c) - \sqrt{b^2+(c-a)^2}$, а за $\sin(2x+\varphi) = 1$ максимум $f(x) = \frac{1}{2}\Big(a+c+\sqrt{b^2+(c-a)^2}\Big)$.

б) $y_{\max} = \frac{1}{2}\Big(5+11+\sqrt{8^2+(5-11)^2}\Big) = 13$, $y_{\min} = 3$.

870. а) За $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, функција није дефинисана. За $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ имамо:

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \frac{2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}}{\sqrt{2}|\cos x|} = \frac{2\sin 2x\cos x}{\sqrt{2}|\cos x|}$$
$$= \begin{cases} \sqrt{2}\sin 2x & \text{за } \cos x > 0, \\ -\sqrt{2}\sin 2x & \text{за } \cos x < 0. \quad \text{(Сл. 67)} \end{cases}$$

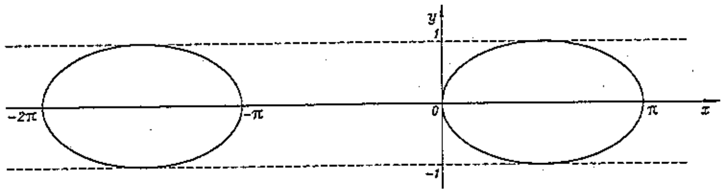


Сл. 67

б) Видети слику 68.

871. а) Како је $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ биће $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

б) π; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}$; ђ) $\frac{5\pi}{6}$. е) Не постоји јер $\frac{\pi}{3} > 1$.



Сл. 68

872. а) Нека је $\alpha = \arcsin x$. Тада је $\sin\alpha = x$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, (из $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ следи да не долази у обзир $\cos\alpha = -\sqrt{1-x^2}$). Нека је $\beta = \arccos x$. Тада је $\cos\beta = x$ и $\sin\beta = \sqrt{1-x^2}$. Дакле,

$$\sin(\alpha+\beta) = x^2 + (1-x^2) = 1,$$

па је $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Међутим, из $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\beta \in [0,\pi]$ следи $\alpha + \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, па је $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

873. а) Нека је $\beta = \arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$. Тада је $\cos\beta = \sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ и $\beta \in [0,\pi]$. Како је $\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{7}\right)$ бића $\cos\beta = \cos\dfrac{9\pi}{14}$, дакле $\beta = \dfrac{9\pi}{14} + 2k\pi$ или $\beta = -\dfrac{9\pi}{14} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Како је $\beta \in [0,\pi]$, долази у обзир само $\beta = \dfrac{9\pi}{14}$.

б) $-\pi/10$. в) $-\pi/6$. г) $\pi/3$.

874. а) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(-\arcsin\dfrac{1}{2}\right) = \cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(-\sin\dfrac{\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\dfrac{9\pi}{14}\right) = \dfrac{9\pi}{14}$; в) $\dfrac{24}{25}$; г) $\dfrac{12}{5}$; д) $\dfrac{2}{3}$.

875. а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) π; в) $-\dfrac{\pi}{2}$; г) $\dfrac{\pi}{2}$; д) $\dfrac{\pi}{2}$.

876. а) Имамо да је $\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)) = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))} = \dfrac{1-(\sqrt{2}-1)^2}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))) = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$; б) $\dfrac{\pi}{4}$;

в) Уочимо, најпре, да је $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)} = \sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$ и

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}, \text{ па је}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} - 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{5}\right)\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos(\arcsin\frac{4}{5})}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}} - \sqrt{\frac{1-\cos(\arcsin\frac{4}{5})}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}}$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{5}};$$

г) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

877. а) Нека је $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Како је $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{4} + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ (јер из $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ следи $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$), биће

$$\beta + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{1}$$

Међутим, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, па је $\operatorname{tg}\left(\beta + \dfrac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}+1)^2$, тако да (1) постаје $\beta + \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})^2$.

878. а) Ако је $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, онда је $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$, а ако је $\beta = \arcsin\dfrac{15}{17}$, онда је, из $\sin\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$ решење квадратне једначине $\dfrac{15}{17}t^2 - 27 + \dfrac{15}{17} = 0$, дакле $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{5}{3}$ или $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{3}{5}$. Прво решење не долази у обзир јер је $\dfrac{\beta}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Према томе

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$

б) Нека је $\alpha = \arcsin\dfrac{4}{5}$ и $\beta = \operatorname{arctg}(-2)$. Тада је

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\beta = -2, \qquad \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{2}$$

а потребно је израчунати вредност израза $A = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 2\beta\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos 2\beta + \cos\dfrac{\alpha}{2}\sin 2\beta$. Из (1) следи $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, па је $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Како је α угао у првом квадранту, такав ће бити и $\dfrac{\alpha}{2}$, дакле $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Из (2) се добија $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, дакле $\sin 2\beta = -\dfrac{4}{5}$, $\cos 2\beta = -\dfrac{3}{5}$. Према томе $A = -\dfrac{11}{5\sqrt{5}}$.

в) Нека је $\alpha = \arccos\frac{15}{17}$, $\beta = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Тада је

$$\cos\alpha = \frac{15}{17}, \quad \sin\alpha = \frac{8}{17}, \qquad \cos\beta = -\frac{3}{5}, \quad \sin\beta = \frac{4}{5},$$

па је $\sin(\alpha+\beta) = \frac{36}{85}$. Како је $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, биће $\alpha+\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, што значи да је $\alpha+\beta = \pi - \arcsin\frac{36}{85}$. Дакле,

$$\arccos\frac{15}{17} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \arccos\frac{36}{85} = \pi - \arcsin\frac{36}{85} - \arccos\frac{36}{85} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

879. а) Нека је $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \alpha$, $\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \beta$. Тада је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{1+a^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}} = -a$, јер је $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а $a < 0$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{a}$, па је $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1-a^2}{2a}$.

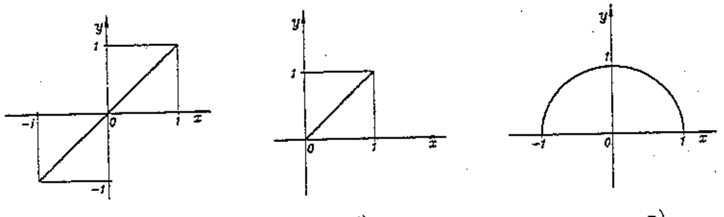
б) Означимо $\alpha = \frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}$. Тада $\alpha \in (0, \pi/2)$, па је $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Дакле, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2a}{b}}{1+\frac{2a}{b}}} = \sqrt{\frac{b-2a}{b+2a}}$. Вредност датог израза је $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{-\operatorname{ctg}\alpha+1} + \frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1} = \frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{-a}$.

880. Нека је $\alpha = \arccos x$, $\beta = \arccos y$. Лако се види да је $\cos(\alpha+\beta) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = \cos\varphi$. Ако је, при томе, још и $\alpha+\beta \leq \pi$ биће $\alpha+\beta = \varphi$ и ако је $\alpha+\beta > \pi$, биће $\alpha+\beta = 2\pi-\varphi$. Међутим, $\alpha \leq \pi-\beta \iff \cos\alpha \geqslant \cos(\pi-\beta) \iff x \geq -y$.

881. а) Функција је дефинисана за $x \in [-1, 1]$. Из дефиниције аркус-синуса следи да је за такве x, $\sin(\arcsin x) = x$ График је приказан на сл. 69 а).

б) График је приказан на сл. 69 б).

в) Како је $\cos(\arccos x) = x$ за $x \in [-1, 1]$ и $\arccos x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ биће $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. График је приказан на сл. 69 в).



а) б) в)

Сл. 69

г) Из $y = \arcsin(\sin x)$ следи $\sin y = \sin x$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Дакле,

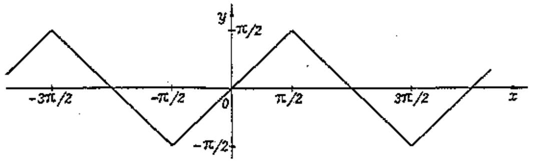
$$y = x, \quad \text{за} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \qquad y = \pi - x, \quad \text{за} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right];$$

$$y = x - 2\pi, \quad \text{за} \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right];$$

итд. Другим речима

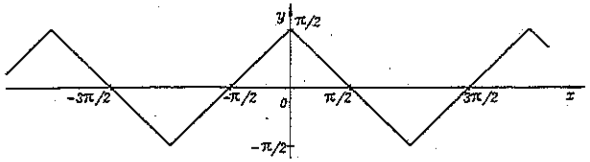
$$y = \begin{cases} x - 2k\pi, & \text{за } x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z} \\ (2k+1)\pi - x, & \text{за } x \in \left[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1) + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

График је приказан на сл. 69 г).



Сл. 69г)

д) График је приказан на сл. 69 д).



Сл. 69д)

882. 1° $\sin x = \sin\alpha \iff \sin x - \sin\alpha = 0$
$\iff 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2} = 0$
$\iff \sin\frac{x-a}{2} = 0 \vee \cos\frac{x+a}{2} = 0$
$\iff x - \alpha = 2k\pi \vee x + \alpha = \pi(2n+1)$ за $k, n \in \mathbf{Z}$
$\iff x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + \pi(2n+1)$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

2° $\cos x = \cos\alpha \iff x = \pm a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3° $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \iff x = \alpha + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right)$.

4° $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha \iff x = \alpha + \pi k$, $k \in \mathbf{N}$ $(\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z})$.

883. $\sin x = \cos x \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \iff \frac{\pi}{2} - x = \pm x + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. (1)

Ако се одабере знак $+$, добија се: $2x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{4} - \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Коефицијент $-k$ се може заменити са k, па се добија серија решења $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ако се у (1) стави знак минус добија се противуречна једначина.

884. *Први начин*: Из $\sin\alpha = \sin\beta$ следи $\alpha = \beta + 2\pi k$ и $\alpha = \pi - \beta + 2\pi k$, па се из дате једначине добија:

1° $2x + \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ — једначина нема решења.

2° $2x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \iff x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Други начин:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\iff 2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{3} - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{4x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\iff 2\sin\frac{\pi}{24}\cos\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) = 0 \iff \cos\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) = 0$$

$$\iff x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

885. а) $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \iff \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

б) $\sin 2x - 1 = 0 \iff \sin 2x = 1 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) $2\cos 2x - 1 = 0 \iff \cos 2x = \frac{1}{2} \iff 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$

$\iff x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

г) $\cos\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \pi x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \pm\frac{1}{6} + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$.

д) $x = 2(8k+1)\pi \vee x = 2(8m+7)\pi$ $(k, m \in \mathbf{Z})$.

ђ) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + m\pi$ $(k, m \in \mathbf{Z})$.

886. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi l$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

б) Ако је $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, онда је $2x + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{4}{5} + 2\pi k$

$\iff x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5} - \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) $\sin 3x = -\sin 12° \iff \sin 3x = \sin(-12°)$

$\iff 3x = -12° + 360°k \vee 3x = -12° + 180°(2k+1)$

$\iff x = -4° + 120°k \vee x = -4° + 60°(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

887. а) $\sin^2 x + 2\sin x = 0 \iff \sin x(\sin x + 2) = 0 \iff \sin x = 0 \vee \sin x = -2$

$\iff x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Једначина $\sin x = -2$ нема решења јер је $-1 \leq \sin x \leq 1$.

б) $2\sin x\cos x - \sin x = 0 \iff \sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\iff \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pi k \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

888. Дата једначина се своди на $\cos 3x = -\cos 5x$, или $\cos(3x + \pi) = \cos 5x$, одакле је $3x + \pi = \pm 5x + 2\pi k$. Једначина има два решења: $x = \frac{\pi}{8}(2k+1) \vee x = \frac{\pi}{2}(2l+1)$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

889. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sqrt{2} \iff -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x = -\sqrt{2}$.

$\iff -\cos x - \cos x = -\sqrt{2} \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

890. $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x \iff \sin x - \sin x\cos x + \cos x - 1 = 0$

$\iff \sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0 \iff (1 - \cos x)(\sin x - 1) = 0$

$\iff 1 - \cos x = 0 \vee \sin x - 1 = 0 \iff x = 2\pi k \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

891. $\cos 2x - \sqrt{2}\sin x\cos 2x = 0 \iff \cos 2x(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0$

$\iff \cos 2x = 0 \vee 1 - \sqrt{2}\sin x = 0$

$\iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

Сва решења једначине $1 - \sqrt{2}\sin x = 0$ садрже се у решењима једначине $\cos 2x = 0$, па су решења полазне једначине $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

892. Једначина има смисла за $\cos 3x \neq 0$, односно за $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. Решења су: $x = \frac{\pi l}{3} \vee x = \frac{\pi}{2}(2m+1)$, за $l, m \in \mathbf{Z}$.

893. Једначина има смисла за $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. $\operatorname{tg} x(3\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0 \iff \operatorname{tg} x = 0 \vee 3\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$. Једначина $3\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$ нема решења, па су $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, једина решења једначине.

894. а) Дата једначина еквивалентна је дисјункцији једначина

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решавањем сваке од њих појединачно и обједињавајући њихова решења добија се: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;   в) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

895. а) $2\sin|x| - 1 = 0 \iff \sin|x| = \frac{1}{2}$

$\iff |x| = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee |x| = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, за $k, n = 0, 1, 2, \ldots$

$x = \pm\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \vee x = \pm\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, за $n, k = 0, 1, 2, \ldots$

б) $\left|2x - \frac{\pi}{3}\right| = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee \left|2x - \frac{\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n, k = 0, 1, 2, \ldots$

$\iff x = \frac{\pi}{6} \pm \left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) \vee x = \frac{\pi}{6} \pm \left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$

в) $x = 2 \pm \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

896. Једначина има смисла за

$$x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1) - \frac{1}{2} \vee x \neq \pi n - 1, \quad \text{за } k, n \in \mathbf{Z}.$$

Ако дату једначину поделимо са $\operatorname{ctg}(x+1) \neq 0$, добија се $\operatorname{tg}(2x+1) = \operatorname{tg}(x+1)$, одакле је $(2x+1) - (x+1) = \pi k$, односно $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

897. Ако је $\sin 2^x = -\frac{1}{2}$, онда је $2^x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k \iff 2^x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из услова $2^x > 0$ следи да вредности на десној страни морају бити позитивне, односно једначина нема решења за $k = 0, -1, -2, \ldots$. На основу претходног се добија

$$x = \log_2\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right), \qquad \text{за } n \in \mathbf{N}.$$

898. Ако је $\cos(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, онда је $\sin x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$. Последња једначина имаће решење ако је $\left|2k\pi \pm \frac{\pi}{6}\right| \leq 1$, а то је једино могуће за $k = 0$. Следи да је полазна једначина еквивалентна са $\sin x = \pm\frac{\pi}{6}$. Дакле, $x = (-1)^k \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

899. Ако је $\cos x^2 = \frac{1}{2}$, онда је $x^2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Десна страна једначине је позитивна за $k \geq 1$, осим тога и за $k = 0$ када је вредност $\frac{\pi}{3}$. Решења дате једначине су: $x = \pm\sqrt{2\pi k \pm \frac{\pi}{3}}$, $k \in \mathbf{N}$ и $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

900. Једначина може имати решења само ако је $\sin x \geqslant 0$. Тада је $\sin^2 x = \frac{1+\cos x}{2}$, тј. $2(1-\cos^2 x) = 1 + \cos x$, односно $(1+\cos x)(1-2\cos x) = 0$. Добијамо, дакле $\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$, што, због услова $\sin x \geqslant 0$, даје решења

$$x = (2k+1)\pi \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2l\pi, \qquad k, l \in \mathbf{Z}.$$

901. Да би $\lg(\sin x)$ био дефинисан мора бити $\sin x > 0$. Међутим, због $0 < \sin x \leq 1$ имамо $\lg(\sin x) \leq 0$, па једначина нема решења.

902. Користећи формулу за синус двоструког угла дата једначина се може написати у облику: $\sin 4x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \vee x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{24}$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

Решења која припадају интервалу $(0, \pi)$ су: $x = \frac{7\pi}{24}$ за $k = 0$, $x = \frac{11\pi}{24}$ за $n = 1$, $x = \frac{19\pi}{24}$ за $k = 1$, $x = \frac{23\pi}{24}$ за $n = 2$.

За $k > 1$, $n > 2$ и негативне вредности за n и k добијају се решења која не припадају интервалу $(0, \pi)$.

903. Како је $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то је једначина еквивалентна једначини $\cos x\,(4\cos^2 x - 3 - 1) = 0$, одакле добијамо $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$. Решења на сегменту $[0, 2\pi]$ су $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2\pi$, $x_5 = \pi$.

904. Како је $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2} = 0$, односно $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} = 3$, тј. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{3}$. Решења последње једначине су $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, па је $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Међу њима, интервалу $(-\pi, 4\pi]$ припадају следећа решења: $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$.

905. Дата једначина еквивалентна је једначини $2(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$, тј. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. На интервалу $[-\pi, \pi]$ ова једначина има четири решења: $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$.

906. а) $2\sin x + 3\sin 2x = 0 \iff 2\sin x + 6\sin x\cos x = 0 \iff 2\sin x(1 + 3\cos x) = 0$

$$\iff \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{3} \iff x = \pi k \vee x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \text{ за } k, n \in \mathbf{Z};$$

б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$;

в) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$;

г) $x = \pi k \vee x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

907. а) $\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x \iff \cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} \iff \cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 0$

$$\iff \cos\frac{x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \iff x = \pi + 2\pi k \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, \text{ за } k, n \in \mathbf{Z}.$$

б) $x = 2\pi + 4\pi m \vee x = 8\pi l$, $m, l \in \mathbf{Z}$. в) $x = 6\pi n \vee x = 3\pi + 12\pi k$, за $n, k \in \mathbf{Z}$.

908. Како је $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, једначина има смисла само ако је $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Ако је $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, онда је

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2} &\iff \sin x - 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \\ &\iff 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\iff \sin\frac{x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 1 \\ &\iff \sin\frac{x}{2} = 0 \iff x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

909. Користећи формулу за $\cos 3x$, после сређивања добија се $\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0$, тј. $\cos x = 0 \vee 4\cos^2 x - 1 = 0$. Ако је $\cos x = 0$, онда је $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ако је $4\cos^2 x - 1 = 0$, односно $2(1 + \cos 2x) - 1 = 0$, тј. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, онда је $x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

910. $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{5}{2} + \cos 4x \iff \frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{3}{2} + 2\cos^2 2x$

$$\iff 4\cos 2x = \frac{3}{2} + 2\cos^2 2x \wedge \sin 2x \neq 0$$

$$\iff \cos 2x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

911. $2 + \cos 4x = 2\sin^2 x \iff 1 + \cos 4x = 2\sin^2 x - 1$

$$\iff 2\cos^2 2x = -\cos 2x \iff \cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$$

$$\iff \cos 2x = 0 \lor \cos 2x = -\frac{1}{2} \iff 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \lor 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \lor x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n \text{ за } k, n \in \mathbf{Z}.$$

912. Дата једначина се може написати у облику:

$$3\frac{\sin x}{\cos x}\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 4\cos^2 x$$

и има смисла за $\cos x \neq 0$, $\cos^2 x \neq \sin^2 x$. Када има смисла једначина је редом еквивалентна са:

$$6\sin^2 x = 4\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$3(1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x(2\cos^2 x - 1)$$
$$4\cos^4 x + \cos^2 x - 3 = 0.$$

Последња једначина по $\cos^2 x$ има само једно позитивно решење: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, одакле следи да су решења дате једначине $x = \pi k \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

913. $2\sin^2 x + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos 2x = \sqrt{3} + 1$

$$\iff 2\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x = \sqrt{3} + 1 \iff \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \lor x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \text{ за } k, l \in \mathbf{Z}.$$

914. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \iff \sin 2x = 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$\iff \sin 2x = \sqrt{3}\sin x \iff 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\iff \sin x = 0 \lor \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \pi k \lor x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \text{ за } k, n \in \mathbf{Z}.$$

915. Када се једнакост $\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}$ замени у дату једначину, она добија облик:

$$3\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} - 4\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg}^3 2x - 3\operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x = 0, \\ 1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\operatorname{tg}^2 2x + 1)(\operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x) = 0, \\ 1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 3\operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x(3\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq \pm 1, \\ \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \lor \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \lor \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x = \pm 1, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \neq 1 \end{cases}$$

Како из $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ следи $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 1$, а из $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ следи $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3}) = 1$, што не одговара услову задатка, решења дате једначине добијају се из $\operatorname{tg} x = 0$, одакле је $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

916. Једначина нема решења јер је $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \leq 2$, па је $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$.

917. а) Ако се стави $\cos x = t$, добија се квадратна једначина по t: $2t^2 + 3t - 2 = 0$, чија су решења: $t = -2 \lor t = \frac{1}{2}$. Дакле, основне тригонометријске једначине су: $\cos x = -2 \lor \cos x = \frac{1}{2}$. Прва једначина нема решења, а решења друге су: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \lor x = 2\pi n - \frac{\pi}{3}$, $k, n \in \mathbf{Z}$. б) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \lor x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$ за $k, n \in \mathbf{Z}$.

918. Користећи се формулама $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$, добија се $\sin x(3 - 4\sin^2 x) + 1 - 2\sin^2 x = 1$, односно $4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 3\sin x = 0$. Сменом $\sin x = t$ $(-1 \leq t \leq 1)$ добија се алгебарска једначина $4t^3 + 2t^2 - 3t = 0$, чија су решења $t = 0 \lor t = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \lor t = -\frac{\sqrt{13} + 1}{4}$, односно,

$$\sin x = 0 \lor \sin x = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \lor \sin x = -\frac{\sqrt{13} + 1}{4}$$

$$\iff x = \pi k \lor x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{13} - 1}{4} + \pi l, \quad k, l \in \mathbf{Z}.$$

Једначина $\sin x = -\frac{\sqrt{13} + 1}{4}$ нема решења јер је $-\frac{\sqrt{13} + 1}{4} < -1$.

919. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2}\sin x\cos x$

$$\iff \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{7}{2}\sin x\cos x$$

$$\iff (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{7}{2}\sin x\cos x$$

$$\iff 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{4}\sin 2x.$$

Сменом $\sin 2x = t$ добија се $2t^2 + 7t - 4 = 0 \iff t = \frac{1}{2} \lor t = -4$. Једначина $\sin 2x = -4$ нема решења, а решења једначине $\sin 2x = \frac{1}{2}$ су $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

920. Дата једначина еквивалентна је са $2\sin^2 x + \cos^2 x = 3\sin x\cos x$. Ако се добијена једначина подели са $\cos^2 x \neq 0$, добија се $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$, чија су решења $x = \frac{\pi}{4} + \pi k \lor x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

921. Ако се $\cos^2 x$ замени са $1 - \sin^2 x$, следи $8(1 - \sin^2 x) + 6\sin x - 3 = 0$, односно $8\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0$. Решавањем једначине по $\sin x$, добија се $\sin x = -\frac{1}{2} \lor \sin x = \frac{5}{4}$.

Ако је $\sin x = -\frac{1}{2}$, онда је $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \vee x = 2\pi n - \frac{\pi}{6}$ за $k, n \in \mathbf{Z}$. За $\sin x = \frac{5}{4}$ нема решења, јер $\sin x$ не може бити већи од јединице, па су решења дате једначине

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \vee x = 2\pi n - \frac{\pi}{6}, \qquad \text{за} \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

922. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 \iff \sin^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x = 1$
$\iff 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0 \iff \sin^2 x = 1 \vee \sin^2 x = \frac{1}{4}$
$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

923. Ако се уведе смена $\operatorname{tg} x = z$, тада је $\sin 2x = \frac{2z}{1+z^2}$, па дата једначина добија облик

$$(1+z^2)\left(1 + \frac{2z}{1+z^2}\right) = 1 \iff (z+1)^2 = 1 \iff z = 0 \vee z = -2.$$

Из $\operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = -2$ добијамо решење једначине $x = \pi k \vee x = \pi n - \operatorname{arctg} 2$ за $k, n \in \mathbf{Z}$.

924. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2} \iff 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 2(1 + \cos x)$
$\iff 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \iff \cos x = 3 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$
$\iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

925. За $x \neq \frac{\pi k}{2}$ важи:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2} \iff \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2} \iff 2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 2 = 0$$
$$\iff \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \vee \operatorname{tg} x = 2 \iff x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k \vee x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad \text{за } k, n \in \mathbf{Z}.$$

926. За $x \neq \frac{\pi k}{2}$, решења су $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k \vee x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, за $n, m \in \mathbf{Z}$.

927. Једначина има смисла за

$$x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{$*$}$$

Тада је она еквивалентна једначини $\sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = 0$, тј. $\sin x(\cos x + 1 - \sin x) = 0$, одакле је $\sin x = 0$ или $\sin x - \cos x = 1$. Решења прве једначине $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ су и сва решења дате једначине, јер се друга једначина може написати у облику $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, тј. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и она, због услова $(*)$, нема других решења, осим $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

928. $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2}\sin 4x \iff \frac{1}{2}\big(\sin(5x + x) + \sin(5x - x)\big) = \frac{1}{2}\sin 4x$
$\iff \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{2}\sin 4x \iff \sin 6x = 0 \iff x = \frac{\pi k}{6},\ k \in \mathbf{Z}$.

929. $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x \iff \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) = \cos 5x \iff \cos 5x - \cos x = 0$
$\iff \sin 3x \sin 2x = 0 \iff x = \frac{\pi k}{3} \vee x = \frac{\pi n}{2}$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

930. $\sin 3x \sin 2x = \sin 11x \sin 10x$
$\iff \frac{1}{2}(\cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x)) = \frac{1}{2}(\cos(11x - 10x) - \cos(11x + 10x))$
$\iff \cos 21x = \cos 5x \iff 21x - 5x = 2\pi k \vee 21x + 5x = 2\pi n$
$\iff x = \frac{\pi k}{8} \vee x = \frac{\pi n}{13}$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

931. $x = \frac{\pi m}{8}$, $m \in \mathbf{Z}$. **932.** $x = \frac{\pi k}{5} \vee x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

933. $\sin x = \cos 2x \iff \sin x - \cos 2x = 0$
$\iff \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \iff 2\sin\frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$
$\iff \sin\frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \vee \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$
$\iff \frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \pi k \vee \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} + \pi l$
$\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi l,$ за $k, l \in \mathbf{Z}$
$\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$.

Напомена. Уочава се да сва решења друге једначине не садрже у решењима прве једначине. За $k = -1 - 3l$, $l \in \mathbf{Z}$, добија се $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(-1-3l)}{3} = -\frac{\pi}{2} - l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.

934. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \iff 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$
$\iff \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 = \iff \sin 2x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$
$\iff x = \frac{\pi k}{2} \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ за $k, n \in \mathbf{Z}$.

935. $x = \frac{\pi k}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \iff x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

936. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0 \iff (\sin x + \sin 3x) - (\sin 2x + \sin 4x) = 0$
$\iff 2\sin 2x \cos x - 2\sin 3x \cos x = 0 \iff \cos x(\sin 2x - \sin 3x) = 0$

$$\iff \cos x = 0 \vee \sin 2x - \sin 3x = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}(2k+1), & k \in \mathbf{Z} \\ \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0 \end{cases}$$

$\iff x = \frac{\pi}{2}(2k+1) \vee x = 2\pi l \vee x = \frac{\pi}{5}(2m+1)$, за $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

937. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin x = \frac{1}{2} \iff 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$\iff \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

938. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

939. $\cos 6x + \sin 5x + \sin 3x - \cos 2x = 0$
$\iff (\cos 6x - \cos 2x) + (\sin 5x + \sin 3x) = 0 \iff \sin 4x \sin 2x - \sin 4x \cos x = 0$
$\iff \sin 4x(\sin 2x - \cos x) = 0 \iff \sin 4x\left(\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 0$
$\iff \sin 4x \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\iff \sin 4x = 0 \vee \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \vee \sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\iff x = \frac{\pi k}{4} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$, за $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

940. $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x \iff 2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x$

$\iff 2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\iff 2\sqrt{2}\cos x\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \cos x = 0 \vee \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

941. $x = \pi k \vee x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

942. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) \iff 2\cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2\sin x}$

$\iff \sin^2 x = \frac{1}{2} \iff \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \iff \cos 2x = 0$

$\iff 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

943. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) + \sin x = 2\cos 3x \iff \sin x - \sin 5x = 2\cos 3x$

$\iff -2\cos 3x\sin 2x = 2\cos 3x \iff \cos 3x = 0 \vee \sin 2x = -1$

$\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \vee x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ за $k, n \in \mathbf{Z}$.

944. $\sin^2 2x + \sin^2 5x = 1 \iff \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2} = 1$

$\iff \cos 10x + \cos 4x = 0 \iff 2\cos 7x\cos 3x = 0$

$\iff \cos 7x = 0 \vee \cos 3x = 0 \iff 7x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\iff x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

945. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1 \iff \cos 4x + \cos 2x = 0$

$\iff 2\cos 3x\cos x = 0 \iff \cos 3x = 0 \vee \cos x = 0$

$\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + \pi n \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

946. $\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1 \iff \cos 2x + \cos 8x = 1 + \cos 6x$

$\iff 2\cos 5x\cos 3x = 2\cos^2 3x \iff \cos 3x(\cos 5x - \cos 3x) = 0$

$\iff \cos 3x\sin 4x\sin x = 0 \iff \cos 3x = 0 \vee \sin 4x = 0 \vee \sin x = 0$

$\iff x = \frac{\pi}{6}(2k+1) \vee x = \pi l \vee x = \frac{\pi m}{4}$, $k, l, m \in \mathbf{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{6}(2k+1) \vee x = \frac{\pi n}{4}$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

У интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ добијају се следећа решења: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

947. $\sin^2 5x - \sin^2 2x = 0 \iff (\sin 5x + \sin 2x)(\sin 5x - \sin 2x) = 0$

$\iff 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}\cdot 2\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0 \iff \sin 7x\sin 3x = 0$

$\iff \sin 7x = 0 \vee \sin 3x = 0 \iff x = \frac{\pi k}{7} \vee x = \frac{l\pi}{3}$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

948. $1 - 2\sin^2 8x = \sin 4x \iff \cos 16x = \sin 4x \iff \cos 16x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0$

$\iff 16x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi k}{10} \vee x = -\frac{\pi}{24} + \frac{l\pi}{6}$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

949. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x \iff \sin^2 x - \cos^2 x = \cos x \iff \cos 2x + \cos x = 0$

$\iff 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \iff \cos\frac{3x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 0$

$\iff \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \vee x = \pi + 2\pi n \iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

950. Дата једначина еквивалентна је са једначином:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2},$$

чија су решења $x = \frac{\pi}{8}(2m+1) \vee x = \pi n \pm \frac{\pi}{6}$, за $m, n \in \mathbf{Z}$.

951. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \vee x = \frac{\pi}{12} + \pi l \vee x = \frac{5\pi}{12} + \pi m$ за $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

952. За решавање дате једначине користи се формула $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\cos x - \frac{8\pi}{3}\right) = 1 \iff \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{16\pi}{3}\right)}{2} = 1$$

$$\iff \frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{16\pi}{3} = 2\pi k \iff \cos x = 3k + 8,\quad k \in \mathbf{Z}.$$

Добијена једначина има решења ако је: $-1 \leq 3k + 8 \leq 1 \iff -9 \leq 3k \leq -7 \implies k = -3$. Тада је $\cos x = -1 \iff x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

953. Ако се дата једначина подели са $\cos^2 x \neq 0$, добија се:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3 = 0 \iff \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} + \pi k \vee x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi l, \quad \text{за } k, l \in \mathbf{Z}.$$

954. Ако се дата једначина трансформише на функције полуугла, добија се:

$$4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 6\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$$

$$\iff 5\sin^2\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 7\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

После дељења са $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$, добија се $5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 8\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 7 = 0$. Решења једначине су:

$$x = 2\pi k + 2\operatorname{arctg}\frac{-4-\sqrt{51}}{5} \vee x = 2\pi l + 2\operatorname{arctg}\frac{-4+\sqrt{51}}{5}, \quad \text{за } k, l \in \mathbf{Z}.$$

955. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k \vee x = \pi l + \operatorname{arctg} 3$, за $k, l \in \mathbf{Z}$. **956.** $x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + \pi l$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

957. *Први начин*:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\iff \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2} \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$x = 2\pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad \text{за } k, n \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Други начин: Ако се $\sqrt{3}$ замени са $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$, једначина прелази у $\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\sin x + \cos x = 1$ и добија облик као (1).

Трећи начин: Дату једначину можемо написати као $\sqrt{3}\sin x = 1 - \cos x$. После квадрирања и замене $\sin^2 x$ са $1-\cos^2 x$ добијамо:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \iff \cos x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\implies x = 2\pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, \quad \text{за } k, n, m \in \mathbf{Z}.$$

Решење $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m$ не задовољава дату једначину већ једначину $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$. Чињеница да се при решавању дате једначине појавило решење које не задовољава, може се објаснити тиме што једначина, која је добијена квадрирањем тј. једначина $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ еквивалентна је са $\cos x \pm \sqrt{3}\sin x = 1$.

Четврти начин: Увођењем смене

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{где је } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

добија се једначина $t^2 - \sqrt{3}t = 0 \iff t = 0 \vee t = \sqrt{3}$, односно $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \vee \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$, чија су решења $x = 2\pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ за $k, l \in \mathbf{Z}$.

958. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **959.** $x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k \vee x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi l$, за $k, l \in \mathbf{Z}$.

960. $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi m \vee x = \frac{\pi}{12} + \pi(2n+1)$ за $m, n \in \mathbf{Z}$.

961. Када се у формули $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\psi)$ замени $a = 1$ и $b = 1$, а ψ се добија из система $\sin\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тада је $\sin\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, односно лева страна једначине добија облик $\sqrt{2}\sin(13x+\psi)$, где је $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = 1$, тј. $\psi = \frac{\pi}{4}$, $\psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па је

$$\sqrt{2}\sin(13x+\psi) = \sqrt{2}\sin 17x \iff \sin(13x+\psi) = \sin 17x, \quad \text{одакле је:}$$

1° $17x - \left(13x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi l}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

2° $17x + \left(13 + \frac{\pi}{4}\right) = \pi + 2\pi l \iff x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi l}{15},\ l \in \mathbf{Z}$.

962. Ако се дата једначина подели са $\sqrt{12^2+5^2} = 13$, добија се: $\frac{12}{13}\cos x - \frac{5}{13}\sin x = -1$, где је $\cos\psi = \frac{12}{13}$, $\sin\psi = \frac{5}{13}$. Даље је $\cos x\cos\psi - \sin x\sin\psi = -1$, тј. $\cos(x+\psi) = -1$,

односно $x = -\psi + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Како се из $\cos\psi = \frac{12}{13}$ добија $\psi = \arccos\frac{12}{13}$, решење дате једначине је $x = -\arccos\frac{12}{13} + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

963. $\sin x + \cos x = 1 \iff \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff x = 2\pi m \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ за $m, n \in \mathbf{Z}$.

964. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m \wedge y = \frac{\pi}{6} - 2\pi m$ за $m \in \mathbf{Z}$.

965. Квадрирањем а затим сабирањем једначина добијамо: $2 = 1 + 2\cos^2 y$, односно $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Замењивањем ове вредности y у систем једначина и одвојеним разматрањем случајева: $k = 4m$, $k = 4m+1$, $k = 4m+2$ и $k = 4m+3$, закључујемо да су његова решења:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\pi}{6} + 2\pi m, & y_1 &= \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\\
x_2 &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & y_2 &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\\
x_3 &= \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, & y_3 &= \frac{5\pi}{4} + 2\pi m,\\
x_4 &= \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, & y_4 &= \frac{7\pi}{4} + 2\pi m, \quad \text{за } n, m \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Прва и трећа, односно друга и четврта група решења могу се објединити у:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\pi}{6} + \pi k & y_1 &= \frac{\pi}{4} + \pi l,\\
x_2 &= -\frac{\pi}{6} + \pi k, & y_2 &= -\frac{\pi}{4} + \pi l, \quad \text{за } k, l \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

966. Када се $y = \frac{\pi}{2} - x$ замени у првој једначини, добија се

$$\begin{aligned}
&\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\
&\iff -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\sin x\cos x\\
&\iff -\cos 2x = \sin 2x\\
&\iff \operatorname{tg} 2x = -1, \quad \text{за } x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Решења су $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2} \wedge y = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi m}{2}$ за $l, m \in \mathbf{Z}$.

967. Добија се једначина $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Решења су $x = \frac{5\pi}{24} - \frac{\pi k}{2} \wedge y = \frac{\pi}{24} - \frac{\pi k}{2}$ за $k \in \mathbf{Z}$.

968. $\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = \pi k, & k \in \mathbf{Z} \\ x-y = \pi l, & l \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Решења су $x = \frac{\pi}{2}(k+l) \wedge y = \frac{\pi}{2}(k-l)$ за $k, l \in \mathbf{Z}$.

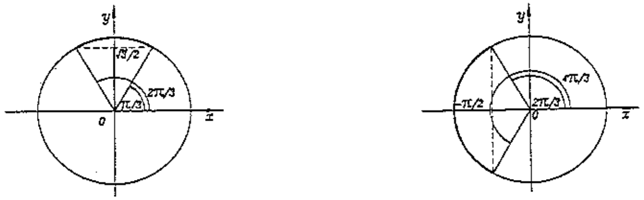
969.
$$\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos 2x-\cos 2y=1\end{cases} \iff \begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ 1-2\sin^2 x+1-2\cos^2 y=1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Сменом $\sin x=U$, $\cos y=V$, добија се $U+V=1$, $U^2+V^2=\frac{1}{2}$. Решења алгебарског система једначина су $U=\frac{1}{2}\wedge V=\frac{1}{2}$. Даље је
$$\sin x=\frac{1}{2} \iff x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z},$$
$$\cos y=\frac{1}{2} \iff y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l,\quad l\in\mathbf{Z}.$$

970.
$$\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}\\ \sin y\cos x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases}\sin(x+y)=1\\ \sin(x-y)=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbf{Z}\\ x-y=\pi l, & l\in\mathbf{Z}\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k+\dfrac{\pi l}{2}, & k,l\in\mathbf{Z}\\ y=\dfrac{\pi}{4}+\pi k-\dfrac{\pi l}{2}, & k,l\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

971. Решења су $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(m+n)\wedge y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(m-n)$ за $m,n\in\mathbf{Z}$.

972. а) Решење је $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k$ за $k\in\mathbf{Z}$, (сл. 70 а).



а) б)

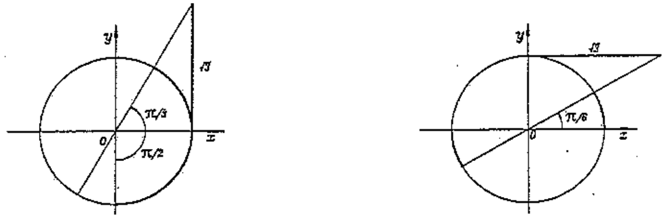
Сл. 70

б) Решење је: $\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, (сл. 70 б).

в) Решење је $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, (сл. 71 а).

г) Решење је $x\in\left(\pi k,\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ (сл. 71 б).

д) $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. ђ) $x\in\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\frac{7\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$.



а) б)

Сл. 71

973. а) $\sin x-\cos x>0 \iff \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$
$$\iff 2\pi k+\frac{\pi}{4}<x<\pi(2k+1)+\frac{\pi}{4} \text{ за } k\in\mathbf{Z},$$
односно $x\in\left(2\pi k+\frac{\pi}{4},\pi(2k+1)+\frac{\pi}{4}\right)$ за $k\in\mathbf{Z}$.

б) $x\in\left(\pi(2k-1)+\frac{\pi}{4},2\pi k+\frac{\pi}{4}\right)$ за $k\in\mathbf{Z}$.

974. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$, $x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

975. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x>0 \iff \sin x(1+\sin x+\sin^2 x)>0$.
Како је $1+\sin x+\sin^2 x$ увек веће од нуле, следи да је дата неједначина еквивалентна са $\sin x>0$, па је $2\pi k<x<2\pi k+\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

976. $\cos 2x-\sin 2x\geq 0 \iff \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$
$$\iff -\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$$
$$\iff -\frac{3\pi}{8}+\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

977. $x\in\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

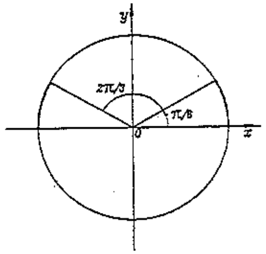
978. $x\in\left[\frac{\pi}{8}+\pi k,\frac{3\pi}{8}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$.

979. $x\in\left(\frac{1}{3}-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3},\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

980. $x\in\left(\pi k,\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

981. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, тј. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$, односно $-\frac{5\pi}{4}+2k\pi<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, одакле $2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

б) $k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.



Сл. 72

982. Користећи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и увођењем смене $\sin x = t$, добија се $t(1-2t) > 0$, одакле је $0 < t < 1/2$. Даље је $0 < \sin x < 1/2$. Неједначине $\sin x > 0$ и $\sin x < 1/2$ имају решења у интервалу $x \in (0, \pi)$, па су решења полазне неједначине (користећи период функције $\sin x$), $x \in \left(2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Видети сл. 72.

983. $|\sin x| > \frac{1}{2} \iff \sin x < -\frac{1}{2} \vee \sin x > \frac{1}{2}$
$\iff -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < 2\pi k - \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
Решење је $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

984. $x \in [2\pi n, \pi(2n+1)]$, $n \in \mathbf{Z} \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

985. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x \geq 0$, тј. $2\sin x\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \geq 0$, односно $\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$. Треба разматрати случајеве $\sin x \geq 0$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$, односно $\sin x \leq 0$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$. Скуп решења је $\left[k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

986. а) Решавањем квадратне неједначине добијамо $\cos x < \frac{1}{2}$ или $\cos x > 1$, па, како неједначина $\cos x > 1$ нема решења, добијамо $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

г) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

987. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $(\cos^2 x - 2\sin x)^2 \geq 0$, па су њена решења сви реални бројеви.

б) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\cos^2 x - \cos x - 2 > 0$, одакле $\cos x < -1$ или $\cos x > 2$; дакле, дата неједначина нема решења.

988. а) Како је $1 - 2\sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$, неједначина постаје $(\cos x - \sin x)^2 \leq \cos x - \sin x$, па је $0 \leq \cos x - \sin x \leq 1$. Решења неједначине $\cos x - \sin x \geq 0$ на сегменту $[0, 2\pi]$ су $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ (в. задатак 973), а неједначине $\cos x - \sin x \leq 1$ су $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (в. задатак 981). Дакле, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

б) $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right)$.

в) $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$. *Упутство.* Дата неједначина је еквивалентна неједначини $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\sqrt{2}\cos x + 1) > 0$.

989. а) $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;   б) $\frac{k\pi}{2} < x < (4k+1)\frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$;
в) $(2k+1)\frac{\pi}{4} < x < (k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq (4k+3)\frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$.

990. $\sin 2x > \cos x \iff 2\sin x \cos x - \cos x > 0 \iff \cos x(2\sin x - 1) > 0$.
Нека је $f(x) = \cos x(2\sin x - 1)$. Период функције $f(x)$ је $T = 2\pi$. Даље је

$$\begin{cases} \cos x(2\sin x - 1) = 0, \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}, \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$
$$\iff x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}.$$

Функција $f(x)$ у интервалу $[0, 2\pi]$ има четири нуле. Добијене нуле дати одсечак деле на пет интервала. Решења неједначине на интервалу $[0, 2\pi]$ су: $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Користећи период функције $f(x)$ добија се:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

991. Разматрати два случаја: $(\sqrt{2 - 2\cos x} \geq 1$ и $\cos x \geq 0)$ или $(\sqrt{2 - 2\cos x} \leq 1$ и $\cos x \leq 0)$. Решења: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

992. Коришћењем формула за трансформацију збира тригонометријских функција у производ добијамо еквивалентну неједначину $\cos x \cos \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} < 0$. Разматрањем могућих случајева налазимо решења: $x \in \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{5}, \pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{5}, 2\pi\right)$.

993. а) $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{9} + k\pi \vee k\pi < x < \frac{2\pi}{9} + k\pi \vee -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < -\frac{\pi}{9} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
б) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$;
в) $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
г) $\frac{k\pi}{8} < x < \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.

994. $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x \iff 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos 2x - \operatorname{tg} x \iff -\sin 2x = -\cos 2x - \operatorname{tg} x$. За $\operatorname{tg} x = z$ добија се

$$\frac{2z}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} + z \iff z^3 - z^2 - z + 1 = 0$$
$$\iff (z+1)(z-1)^2 = 0 \iff z = -1 \vee z = 1.$$

Даље је $\operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1 \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi k \vee x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ k, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

995. а) Примењујући формулу за разлику синуса два угла добија се једначина

$$2\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{или}$$
$$\left(1 + 2\sin\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Како је $\sin\frac{5\pi}{12} > 0$, то је $1 + 2\sin\frac{5\pi}{12} \neq 0$, што значи да је полазна једначина еквивалентна са $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, одакле је $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **996.** $x = \frac{\pi(6k \pm 1)}{6}$, $x = \frac{\pi(3n \pm 1)}{3}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

997. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0 \iff \frac{\sin x}{\cos x \sin 3x} = 0$. Једначина ће имати смисла за

$$x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad \text{и} \quad x \neq \frac{\pi l}{3}, \qquad \text{за } k, l \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Потребно је одредити вредности x за које је бројилац једнак нули. За $\sin x = 0$ следи

$$x = \pi k \iff x = \frac{\pi}{3} \cdot 3k, \quad \text{за } k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ако се упореде (1) и (2) закључује се да дата једначина нема решења.

998. $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0 \iff \frac{\sin 3x \cos x}{\cos 3x} = 0$.

Једначина ће имати смисла за $\cos 3x \neq 0$, тј. $x \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$. Потребно је одредити x када је бројилац једнак нули.

1° Ако је $\sin 3x = 0$, онда је $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2° Ако је $\cos x = 0$, онда је $x = \frac{\pi}{2}(2l+1)$, $l \in \mathbf{Z}$.

За вредности x наведене у 2° дата једначина нема смисла. Њена решења су $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

999. Решење добијамо из низа еквиваленција:

$$11\operatorname{ctg} x - 5\operatorname{tg} x = \frac{16}{\sin x} \iff \frac{11\cos^2 x - 5\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{16}{\sin x}$$
$$\iff \begin{cases} 11\cos^2 x - 5\sin^2 x = 16\cos x \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 16\cos^2 x - 16\cos x - 5 = 0 \\ x \neq \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \cos x = \frac{5}{4} \vee \cos x = -\frac{1}{4} \\ x \neq \frac{\pi k}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{4} \\ x \neq \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$
$$\iff x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

1000. *Први начин:*
Због израза у коме се јавља апсолутна вредност, задатак се може решавати у два дела: у првом, када је $\sin x \geq 0$, у другом када је $\sin x < 0$. У првом делу $|\sin x| = \sin x$ и полазна једначина добија облик $\sin x = \sin x + 2\cos x$, тј. $\cos x = 0$. Решења последње једначине су $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Од добијених вредности за x треба одредити оне које задовољавају услов $\sin x \geq 0$. Уочава се да су то све вредности $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. У другом делу за $|\sin x| = -\sin x$ полазна једначина добија облик $-\sin x = \sin x + 2\cos x$, тј. $\sin x + \cos x = 0$. Када се последња једначина напише у облику $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, добијају се решења $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, али само $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, задовољавају услов $\sin x < 0$. На основу претходног, решења дате једначине су: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Други начин:
После квадрирања дата једначина добија облик:

$$\sin^2 x = \sin^2 x + 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x \iff \cos x(\sin x + \cos x) = 0.$$

Добијена једначина еквивалентна је са $\cos x = 0 \vee \sin x + \cos x = 0$. Прва једначина има решења $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а друга $x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$, $k \in \mathbf{Z}$. Како се при квадрирању добија једначина која може имати и нека решења која не задовољавају полазну једначину, неопходно је извршити проверу. Провером се добија да су решења полазне једначине само $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbf{Z}$.

1001. $x = \frac{\pi}{4} + \pi(2k+1) \vee x = 2\pi l$ за $k, l \in \mathbf{Z}$. **1002.** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1003. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^8 x - \cos^8 x$
$\iff \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)$
$\iff \sin^4 x - \cos^4 x = 0 \vee \sin^4 x + \cos^4 x = 1$
$\iff \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \vee \cos^4 x - (1 - \sin^4 x) = 0$
$\iff \cos 2x = 0 \vee \cos^4 x - \cos^2 x(1 + \sin^2 x) = 0$
$\iff \cos 2x = 0 \vee \cos x = 0 \vee \cos x - 1 - \sin^2 x = 0$
$\iff \cos 2x = 0 \vee \cos x = 0 \vee 2\sin^2 x = 0$
$\iff 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee x = \frac{\pi}{2} + \pi n \vee x = \pi m, \quad k, n, m \in \mathbf{Z}$
$\iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + \pi n \vee x = \pi m, \quad k, n, m \in \mathbf{Z}$
$\iff x = \frac{\pi l}{4}$, $l \in \mathbf{Z}$.

1004.
$$\log_{0,1}\sin 2x + \lg\cos x - \lg 7 = 0$$
$$\iff -\lg\sin 2x + \lg\cos x - \lg 7 = 0$$
$$\iff \begin{cases} \lg\frac{\cos x}{7\sin 2x} = 0 \\ \sin 2x > 0, \ \cos x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 7\sin 2x \\ \sin 2x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \cos x = 14\sin x \cos x \\ \sin 2x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = \frac{1}{14} \\ x \in \left(2\pi k, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\iff x = \arcsin\frac{1}{14} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

1005.
$$2\cos x = \sqrt{2 + \sin 2x} \iff \begin{cases} 4\cos^2 x = 2 + \sin 2x \\ \cos x > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2(2\cos^2 x - 1) = \sin 2x \\ \cos x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos 2x = \sin 2x \\ \cos x > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 2 \\ \cos x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

Међутим, $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$ задовољава неједнакост $\cos x > 0$ за
$$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n \quad \text{за } k = 4n \quad \text{или}$$
$$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{за } k = 4n - 1, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

1006. Дата једначина еквивалентна је са
$$\frac{1}{\log_{\sin x}\cos x} + \log_{\sin x}\cos x = 2.$$
Увођењем смене $\log_{\sin x}\cos x = t$, добијамо квадратну једначину $t^2 - 2t + 1 = 0$, чије је решење $t = 1$. Из $\log_{\sin x}\cos x = 1 \iff 0 < \cos x = \sin x < 1$ је $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

1007. а) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3 \iff 4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3$.
Увођењем смене $4^{\cos^2 x} = t$ једначина добија облик:
$$t^2 + 4t - 12 = 0 \iff t = -6 \vee t = 2.$$
Како мора бити $t = 4^{\cos^2 x} > 0$, дата једначина еквивалентна је са $4^{\cos^2 x} = 2$, која се своди на
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k \vee x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad \text{за } k, n \in \mathbf{Z}.$$

Од свих добијених решења постоји само једно које припада датом интервалу $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, а то је: $x = \frac{\pi}{4}$.

1008. $\sin x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff \sin x - \sqrt{3}\cos x + \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
$\iff (\sin x + \operatorname{tg} x) - (\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}) = 0 \iff \operatorname{tg} x(\cos x + 1) - \sqrt{3}(\cos x + 1) = 0$
$\iff (\cos x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 \iff \cos x = -1 \vee \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
$\iff x = \pi + 2\pi k \vee x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$.

Од добијених решења у интервалу $\left(-\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$ се налазе $x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \pi$.

1009. $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0 \iff 1 - 5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 0$
$\iff 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \iff \sin x = -3 \vee \sin x = \frac{1}{2}$.

Једначина $\sin x = -3$ нема решења. Решења једначине $\sin x = \frac{1}{2}$, су $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, за $k, n \in \mathbf{Z}$. За било које решење из прве серије је: $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, које задовољава неједнакост $\cos x \geq 0$. За било које решење из друге серије је: $\cos x = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, које не задовољава $\cos x \geq 0$. Услове задатка испуњавају само решења: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1010. Нека је $\beta = \arcsin 3x$. Тада је $\sin\beta = 3x$, $\cos\beta = \sqrt{1 - 9x^2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}$ (наравно уз услов $|3x| < 1$, ако је $3x = \pm 1$, онда $\beta \pm \frac{\pi}{2} \neq \operatorname{arctg}\left(\pm\frac{5}{3}\right)$). Дакле, једначина се може написати у облику $\operatorname{arctg}\frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \operatorname{arctg} 5x$, односно $\frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} = 5x$. Његова решења су: $x = 0$, $x = \frac{4}{15}$ и $x = -\frac{4}{15}$.

1011. Најпре треба приметити да мора бити $x \in [0, 1]$, ако је $x \in [-1, 0)$, онда је $\arccos x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, а $\operatorname{arctg}\frac{15x}{16} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Једино решење је $x = \frac{4}{5}$.

1012. $\operatorname{arctg}(x + 1) = \operatorname{arctg}(x - 1) + \operatorname{arctg} 1 \iff \operatorname{arctg}(x + 1) = \operatorname{arcctg}\frac{x}{2 - x} \wedge x < 2$ (Остале могућности не долазе у обзир јер $\operatorname{arctg}(x + 1) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) $\iff x + 1 = \frac{x}{2 - x} \wedge x < 2 \iff x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$.

1013. $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$. **1014.** $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

1015. Ако је $mn < 0$, нема решења. Ако $m > 0$, $n > 0$ онда $x = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, ако $m < 0$, $n < 0$ онда $x = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

1016. а) Из $\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \frac{\pi}{6}$ имамо $x^2 - 6x + 8{,}5 = 0{,}5$, одакле је $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. б) Како је $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, једначина је еквивалентна једначини $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$, чије је решење $x_1 = \frac{1}{2}$. в) Искористити релацију $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Решење је $x_1 = 1$. г) Ако уведемо смену $\arcsin x = t$, добићемо квадратну једначину $3t^2 - 13t + 4 = 0$, чија су решења $t_1 = 4$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Како је $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, долази у обзир само случај $\arcsin x = \frac{1}{3}$, па је решење $x_1 = \sin\frac{1}{3}$. д) Нема решења.

1017. а) Како је $\arcsin(\sin 5) = 5 - 2\pi$, то је неједначина еквивалентна са $x^2 - 4x < 5 - 2\pi$, чија су решења $x \in (2 - \sqrt{9 - 2\pi}, 2 + \sqrt{9 - 2\pi})$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$; в) $x > 1$.

1018. Сменом $t = \arcsin x$ једначина добија облик

$$t^3 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 = a\pi^3, \quad \text{односно} \quad 12t^2 - 6\pi t + \pi^2(1 - 8a) = 0 \qquad (1)$$

За $a < \frac{1}{32}$, једначина (1) има негативну дискриминанту па, према томе, нема решења.

За $a = \frac{1}{8} \implies t = 0 \vee t = \frac{\pi}{2}$. Дакле, за $a = \frac{1}{8}$, решења једначине су: $x = \sin 0 = 0$ и $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

За $a = \frac{7}{8} \implies t = -\frac{\pi}{2} \vee t = \pi$. Како је $t = \pi$ у контрадикцији са $t = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, остаје само $t = -\frac{\pi}{2}$, односно $x = -1$.

1019. Дата једначина еквивалентна је са $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = m$. Како је $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2}$, и $\left|\frac{m}{2}\right| < 1$, m мора задовољавати релацију $-2 \leq m \leq 2$ и тада су решења реална. Ако је $m = 1$, тада је $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ и $x_2 = 2\pi l$ за $k, l \in \mathbf{Z}$.

1020. Једначина има решења кад је $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| < 1$, односно $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

1021. $a\sin x = b\cos\frac{x}{2} \iff 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - b\cos\frac{x}{2} = 0$
$\iff \cos\frac{x}{2}\left(2a\sin\frac{x}{2} - b\right) = 0 \iff \cos\frac{x}{2} = 0 \vee 2a\sin\frac{x}{2} - b = 0$.

Решења једначине $\cos\frac{x}{2} = 0$ су $x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Једначина $\sin\frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$ има решења ако је $\left|\frac{b}{2a}\right| \leq 1$, односно $|b| \leq 2|a|$.

За $a = 0$, $b \neq 0$, једначина је немогућа.

За $a = 0$, $b = 0$, сваки реалан број је решења једначине.

Решења полазне једначине су:
1° за $|b| < 2|a|$ добијају се две серије решења

$$x = \pi(2k+1) \vee x = (-1)^n 2\arcsin\frac{b}{2a} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbf{Z};$$

2° за $|b| > 2|a|$ решења су $x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ (за $a = 0$, $b \neq 0$).

1022. Добијамо једначину $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$ која има решења за $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$.

1023. Како је $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = a$, то је $1 - 2\sin^2\cos^2 x = a$, тј. $\frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - a$, односно $\sin^2 2x = 2(1-a)$, па је неопходно да буде $0 \leqslant 2(1-a) \leqslant 1$, тј. $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$; за $a = \frac{1}{2}$ решења су $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, за $a = 1$ решења су $x = \frac{\pi l}{2}$ за $k, l \in \mathbf{Z}$.

1024. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$
$\iff (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin 2x + a = 0$

$\iff 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + a = 0 \iff \sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1+a) = 0$.
Сменом $t = \sin 2x$ за $t \in [-1, 1]$, добија се $t = 1 \pm \sqrt{2a+3}$.
1° За $2a + 3 > 0$ једначина има смисла.

а) За $a = -\frac{3}{2}$ решења су реална и једнака.

б) За $a < -\frac{3}{2}$ једначина $\sin 2x = 1 + \sqrt{2a+3}$ нема решења.

в) За $a > -\frac{3}{2}$ и услова $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, односно $-1 \leq 1 + \sqrt{2a+3} \leq 1$ следи да је $a \leq \frac{1}{2}$.

Коначно за $a \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, решење једначине је

$$x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\left(1 - \sqrt{2a+3}\right) + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2° За $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ једначина нема решења.

1025. Дата једначина еквивалентна је са $\frac{1}{2}\left(\cos 2mx + \cos\frac{\pi}{3}\right) = a$, тј. $\cos 2mx = \frac{4a-1}{2}$.
Једначина има решења када је $\left|\frac{4a-1}{2}\right| \leq 1$, одакле је $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$.

1026. Дата једначина еквивалентна је са

$$\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = m,$$
$$(1-m)\sin^2 x - \sin x\cos x - (m+2)\cos^2 x = 0.$$

За $m \neq 1$ добијамо једначину $(1-m)t^2 - t - (m+2) = 0$ (где је $t = \operatorname{tg} x$) чија су решења реална за

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$$

за $m = 1$, добија се да је $\cos x = 0$, а тада је $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $\operatorname{tg} x = -3$, $x = \operatorname{arctg}(-3) + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.

1027. Једноставним трансформацијама неједначина се своди на $\frac{2}{\sin 2x} \leq a$, $\sin 2x \neq 0$.
1° За $a = 0$ добијамо $-1 \leq \sin 2x \leq 1$.

2° За $a < 0$ имамо $-1 \leq \sin 2x < 0$, па наједнакост можемо писати у облику $\frac{2}{a} \leq \sin 2x$.
Даљом дискусијом се добија:

а) за $a < -2$ биће $\frac{2}{a} \leq \sin 2x < 0$;

б) за $-2 \leq a \leq 0$ биће $-1 \leq \sin 2x < 0$.

3° Ако је $a > 0$ наједнакост $\frac{2}{\sin 2x} \leq a$ биће испуњена за $-1 \leq \sin 2x < 0$.

а) за $0 < a < 2$ наједнакост нема „нових“ позитивних решења.

б) за $a \geq 2$ биће $\frac{2}{a} \leq \sin 2x \leq 1$.

1028. а) $x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) Означимо $\sin x = t$. Добија се $4t^3 + 4t^2 - t - 1 \le 0$, тј. $(t+1)(4t^2 - 1) \le 0$, одакле је $t \le -1$ или $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$, тј. $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

1029. а) Дата неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{2\sin^2 x}{(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)} > 0$, тј. $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$, па $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{2\sin x(\cos x + \sin x)}{2\sin x(\cos x - \sin x)} > 0$, тј. $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} > 0$, $\sin x \neq 0$, односно $\cos 2x > 0$, $\sin x \neq 0$, $\sin x \neq \cos x$, па је скуп решења $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) $x \in (-\arccos(-\frac{1}{3}) + 2k\pi, \arccos(-\frac{1}{3}) + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

1030. Из неједнакости: $2|\sin\alpha||\cos\alpha| \ge 0$ следи: $|\sin\alpha|^2 + |\cos\alpha|^2 + 2|\sin\alpha||\cos\alpha| \ge 1$, односно $(|\sin\alpha| + |\cos\alpha|)^2 \ge 1$, одакле је $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \ge 1$.

1031. $\sin\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2}}{2}$
$= \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\left(1 - \cos\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\sin^2\frac{x_1 - x_2}{4}$

Како је $x_1 \in (0, \pi)$ и $x_2 \in (0, \pi)$, то је и $\frac{x_1 + x_2}{2} \in (0, \pi)$, па је

$$2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\sin^2\frac{x_1 - x_2}{4} > 0, \quad \text{односно} \quad \sin\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}.$$

1032. а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 1.$

Лева страна неједнакости следи из $0 \le \frac{|\alpha - \beta|}{2} < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, а десна се своди на $\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \le \frac{1}{4}$. Међутим,

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$
$$\le \left(\frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2} + 1 - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Једнакост важи ако је

$$\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 - \cos\frac{\alpha + \beta}{2},$$

односно за једнакостранични троугао.

б) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + \frac{3}{2}$ и примени се а).

1033. а) Како је $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$, дата неједнакост се своди на

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \ge \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

1034. а) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 49°25'$, а из синусне теореме је $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = 37,12$ и $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = 29,01$. б) $\beta = 39°50'$, $a = 5,691$, $c = 9,136$. в) $\gamma = 88°46'$, $a = 8,86$, $b = 4,83$.

1035. а) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = 12,62$, затим $\beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 89°16'$, (може се користити и формула $\beta = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$) и коначно $\gamma = 180° - \beta - \alpha = 46°14'$.
б) $b = 19,30$, $\alpha = 27°36'$, $\gamma = 13°57'$. в) $c = 741,3$, $\alpha = 59°48'$, $\beta = 59°57'$.

1036. а) $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = 0,86119$, па је $\beta = \beta_1 = 59°27'$ или $\beta = \beta_2 = 120°33'$. Како је $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, биће $\gamma_1 = 91°58'$, $\gamma_2 = 30°52'$, а из $c\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ следи $c_1 = 20,89$, $c_2 = 10,72$.
Задатак дакле, има два решења:

$$\beta_1 = 59°27', \quad \gamma_1 = 91°58', \quad c_1 = 20,89 \qquad \text{и}$$
$$\beta_2 = 120°33', \quad \gamma_2 = 30°52', \quad c_2 = 10,72.$$

б) $\alpha = 33°47'$, $\beta = 64°53'$, $b = 14,65$. в) Такав троугао не постоји.

1037. а) $\alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 19°43'$, $\beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 142°36'$, $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 17°41'$. б) $\alpha = 28°57'$, $\beta = 46°34'$, $\gamma = 104°29'$.

1038. а) $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$;
б) Упутство: $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, $c = 2\sqrt{3}$;
в) $\alpha = 30°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 15°$; г) $a = 2\sqrt{3}$, $\beta = 30°$, $\gamma = 105°$.

1039. $\beta = 45°$, $\gamma = 105°$ или $\beta = 135°$, $\gamma = 15°$.

1040. Применимо косинусну теорему: $(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2)\cos 120°$. Одавде се налази $a = 5$.

1041. Како је $a = \frac{b\sqrt{7}}{3}$, то је $a^2 = \frac{7b^2}{9}$, па из $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ добијамо $\frac{7b^2}{9} = b^2 + 4 - 2b$, тј. $b^2 - 9b + 18 = 0$, одакле је $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, па је $a_1 = \sqrt{7}$, $a_2 = 2\sqrt{7}$.

1042. Из $P = \frac{ac\cos\beta}{2}$ добијамо да је $ac = 28$. Решења система једначина $a + c = 11$, $ac = 28$ су $a_1 = 7$, $c_1 = 4$ и $a_2 = 4$, $c_2 = 7$. У сваком од тих случајева је $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \sqrt{65 - 28\sqrt{3}}$.

1043. Нека је D тачка праве AB таква да је $AD = b$ и $DB = b + c$ (нацртати слику). По синусној теореми за троугао DBC имамо $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b + c}{\sin(\gamma + 30°)}$, одакле је

$\sin(\gamma + 30°) = \dfrac{7}{2\sqrt{19}}$. Лако се израчуна $\cos(\gamma + 30°) = \sqrt{1 - \sin^2(\gamma + 30°)} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$. Сада је $\sin\gamma = \sin((\gamma + 30°) - 30°) = \sin(\gamma + 30°)\cos 30° - \cos(\gamma + 30°)\sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Из синусне теореме за троугао ABC имамо $\dfrac{a}{\sin 60°} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, па је $c = 2$ и $b = 5$ (или обрнуто).

Површина троугла је $P = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

1044. Из троугла ABD налазимо $\sin\angle ABC = \dfrac{5}{6}$, па се (применом синусне теореме) добија $R = \dfrac{b}{2\sin\beta} = 6\,\text{cm}$.

1045. $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R} = \dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{2R} = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$,
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{33}{65}$, $\cos\gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = \dfrac{33}{65}$,
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 14$.

1046. Из $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ добијамо $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$, па важи $\cos\alpha = \dfrac{13}{14}$. Из $P = \dfrac{abc}{4R}$ добија се $bc = 35$. Применом косинусне теореме налазимо $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos\alpha = 74$. Из $b^2 + c^2 = 74$, $bc = 35$ добија се $b = 7$, $c = 5$ (или обрнуто).

1047. Из $P = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$ налазимо $\sin\gamma = \dfrac{12}{13}$, па је $\cos\gamma = \dfrac{5}{13}$. Сада имамо $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = \dfrac{45}{13}$, па је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \dfrac{a^2\sin^2\gamma}{c^2} + \dfrac{b^2\sin^2\gamma}{c^2} + \sin^2\gamma = \dfrac{352}{169}$.

1048. а) $\alpha = 180° - \beta - \gamma$, $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$. Решење је јединствено ако и само ако је $\beta + \gamma < 180°$;

б) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a\cos\dfrac{\beta - \gamma}{2}}{b + c}$ (Молвајдова формула), β и γ се добијају из система једначина $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, $\beta - \gamma = \varepsilon$, b и c из синусне теореме. Решење је јединствено ако и само ако је $\operatorname{tg}\dfrac{\beta - \gamma}{2} < \dfrac{a}{b + c} < 1$;

в), г), д) се решавају слично као б).

ђ) $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$, $\sin\gamma = \dfrac{h_b}{a}$, $c = \dfrac{2Rh_b}{a}$, $\beta = 180° - \alpha - \gamma$, $b = 2R\sin\beta$. Има решења ако и само ако је $h_b \le a \le 2R$ и то: ако $h_b = a$ има једно решење ($\gamma = 90°$, $c = 2R$); ако $h_b < a < \sqrt{2Rh_b}$ има два решења (γ има две суплементне вредности); ако $a = \sqrt{2Rh_b}$ има једно решење ($a = c$, $b = 2\sqrt{a^2 - h_b^2}$); ако $\sqrt{2Rh_b} < a < 2R$ има два решења (α има две суплементне вредности); ако $a = 2R$ има једно решење ($\alpha = 90°$, $c = h_b$);

е) b и c су решења квадратне једначине $t^2 - (b+c)t + \dfrac{2S}{\sin\alpha} = 0$, итд. Решење је јединствено (до на замену места за b и c, β и γ) ако и само ако је $(b + c)^2\sin\alpha \ge 8S$;

ж) Из $\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{bc} = \dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}$ следи $\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = \dfrac{4\sin\alpha}{a^2}$. Дакле β и γ се рачунају из система једначина

$$|\beta - \gamma| = \arccos\frac{\sin\alpha(4S - a^2)}{a^2}, \quad \beta + \gamma = 180° - \alpha.$$

Решење је јединствено (до на замену места за β и γ, b и c) ако и само ако $1 - \operatorname{ctg}\alpha < \dfrac{4S}{a^2} \le 1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

1049. а) Користити $\dfrac{a}{s} = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$, $a = 14,773$, $b = 24,084$, $c = 10,143$, $\beta = 149°45'$;

б) $a = 5,4528$, $\beta = 115°6'$, $\gamma = 13°44'$, $b = 6,3387$, $c = 1,6613$;

в) $\alpha = 38°40'$, $b = 19,183$, $c = 14,353$, $\beta = 93°$, $\gamma = 48°20'$;

г) $\alpha_1 = 53°52'$, $\gamma_1 = 47°34'$, $c_1 = 38°38'$, $\beta_1 = 78°34'$, $b_1 = 50,968$ и $\alpha_2 = 126°8'$, $\gamma_2 = 47°34'$, $c_2 = 38,381$, $\beta_2 = 6°18'$, $b_2 = 5,706$.

д) $\beta = 55°8'$, $\gamma = 44°42'$, $b = 10,576$, $c = 9,065$.

1050. Применити косинусну теорему. Резултат: $\alpha = 78°35'$, $\beta = 40°48'$.

1051. $\alpha = 26°58'$.

1052. Из $\triangle ABC$ добија се $(AC = m)$ $\cos\angle ACB = \dfrac{b^2 + m^2 - a^2}{2mb}$, $\angle ACB = 53°22'$; а из $\triangle ACD$: $\angle ACD = 13°54'$. Сада је $\angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 67°16'$, па се, из $\triangle BCD$, може израчунати друга дијагонала $BD = 31,735$. Поново из $\triangle BCD$ добија се $\angle CBD = 31°33'$. Коначно, угао φ између дијагонала је $\varphi = 180° - \angle ACB - \angle CBD = 95°5'$, а оштар угао између дијагонала је $84°55'$.

1053. 1° Следи из

$$a + b = 2R(\sin\alpha + \sin\beta) = 4R\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$a - b = 2R(\sin\alpha - \sin\beta) = 4R\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

2° Следе из

$$a + b = 4R\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$a - b = 4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$c = 4R\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

1054. Нека је $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c} = k$. Тада је

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2(\alpha + \beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\sin^2\alpha(1 - \cos^2\beta) + \sin^2\beta(1 - \cos^2\alpha) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -\cos(\alpha + \beta) = \cos\gamma.$$

1055. 1° Из косинусне теореме је $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, па је

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4} = \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{4}.$$

1056. 1° $S = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = \dfrac{ab}{2}\cdot\dfrac{c}{2R}$ јер је на основу синусне теореме $\sin\gamma = \dfrac{c}{2R}$.

2° Ако је O центар круга уписаног у троугао, биће

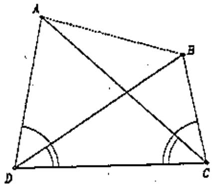
$$S_{AOB} = \frac{cr}{2}, \quad S_{BOC} = \frac{ar}{2}, \quad S_{COA} = \frac{br}{2}, \quad \text{па је} \quad S = \frac{r}{2}(a+b+c).$$

3° Из зад. 1055. следи да је

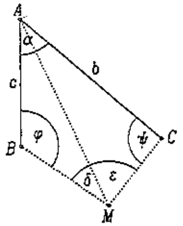
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc},$$

па је $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

1057. Решавањем $\triangle DBC$ (познато: CD, $\angle BDC$, $\angle BCD$, в. сл. 73) добија се $BD = 2748{,}5\,\mathrm{m}$, а решавањем $\triangle ACD$ добија се $AD = 1482{,}4\,\mathrm{m}$. Коначно, решавањем $\triangle ABD$ (познато: AD, BD, $\angle ADB$) добија се $AB = 2002\,\mathrm{m}$.



Сл. 73



Сл. 74

1058. Довољно је израчунати углове φ и ψ јер (в. сл. 74):

$$MA = \frac{c\sin\varphi}{\sin\varepsilon} = \frac{b\sin\psi}{\sin\varepsilon}, \quad MB = \frac{c\sin(\varphi+\delta)}{\sin\delta}, \quad MC = \frac{b\sin(\psi+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}$$

Међутим, из прве релације следи

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b\sin\delta}{c\sin\varepsilon},$$

односно $\dfrac{\sin(360^\circ-(\alpha+\delta+\varepsilon)-\psi)}{\sin\psi} = \dfrac{b\sin\delta}{c\sin\varepsilon}$, одакле се добија

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{c\sin\varepsilon\sin(\alpha+\delta+\varepsilon)}{b\sin\delta + c\cos(\alpha+\delta+\varepsilon)\sin\varepsilon}$$

и коначно $\varphi = 360^\circ - (\alpha+\delta+\varepsilon+\psi)$. За дате резултате мерења је: $\psi = 114^\circ15'$, $\varphi = 97^\circ10'$, $MA = 231{,}95$, $MB = 206{,}08$, $MC = 114{,}72$.

1060. Применити синусну теорему.

1061. Из услова задатка и синусне теореме добија се $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, одакле је $\alpha = 30^\circ$. Како је $\alpha+\beta = 90^\circ$ троугао је правоугли.

1062. а) Имамо да је $a^2-b^2-c^2+2bc = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, тј. $b^2+c^2-2bc\cos\alpha-b^2-c^2+2bc = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, односно $\dfrac{1}{2}\sin\alpha = -2\cos\alpha+2$, па је $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ и како је α угао троугла, мора бити $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}$, $\alpha = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$.

б) Из $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ налазимо $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, па је сада $\cos\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$ и $a = \sqrt{b^2+c^2\pm\frac{6}{5}bc}$.

1063. а) Из $2a+b = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$ и $b = 2a\sin60^\circ = a\sqrt{3}$ добијамо $2a+a\sqrt{3} = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$, тј. $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})a = 8$, па је $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$. Како је $2R = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 16$, то је $R = 8$. б) $R = 6$.

1064. Применом косинусне теореме налазимо да је $E = 8a^2b^2c^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Тврђење задатка следи из чињенице да су у троуглу сва три угла оштра, или највише један угао прав, или највише један угао туп.

1065. Како је $AD = \dfrac{2m}{\sin\alpha}$, $AB = \dfrac{2p}{\sin\alpha}$, применом косинусне теореме за троугао ABC добијамо

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos(\pi-\alpha)} \\ &= \sqrt{\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}+\frac{4m^2}{\sin^2\alpha}+2\frac{4mp}{\sin^2\alpha}\cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+p^2+2mp\cos\alpha} \end{aligned}$$

и на сличан начин $BD = \dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos\alpha}$.

1066. а) Ако је $a = 2b\cos\gamma$, биће $a^2 = 2ab\cos\gamma$, па како је $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, то је $c^2 = b^2$, одакле следи да је $c = b$.

б) Имамо да је $(b+c)^2-a^2 = 3bc$, тј. $b^2+c^2-a^2 = bc$, па је $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2}$, одакле следи да је $\alpha = 60^\circ$.

1067. Означимо са α угао паралелограма. Применом косинусне теореме имамо: (1) $d_1^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ и (2) $d_2^2 = a^2+b^2+2ab\cos\alpha$, јер је $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$. Сабирањем једнакости (1) и (2) добијамо да је $d_1^2+d_2^2 = 2(a^2+b^2)$.

1068. а) Како је $2a^2+2b^2 = d_1^2+d_2^2$ и $d_2^2 = 3d_1^2$, то је $a^2+b^2 = 2d_1^2$. По косинусној теореми је $d_1^2 = a^2+b^2-2ab\cos60^\circ = 2d_1^2-ab$, па је $ab = d_1^2$. Сада је $a^2+b^2+2ab = 2d_1^2+2d_1^2 = 4d_1^2$, па је $(a+b)^2 = 4d_1^2$, односно $a+b = 2d_1$. Сада добијамо систем једначина $a+b = 2d_1$, $ab = d_1^2$. Његово решење је $a = b = d_1$, одакле се добија $\dfrac{a}{b} = 1$; б) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2}$ $\left(\text{или } \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}\right)$.

1069. Означимо паралелограм са $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$, $AC = e$, $BD = f$), са O пресек дијагонала и $\angle AOB = \varphi$. Применом косинусне теореме на троуглове ABO и BCO добијамо

$$a^2 = \frac{e^2}{4}+\frac{f^2}{4}-\frac{ef}{2}\cos\varphi, \qquad b^2 = \frac{e^2}{4}+\frac{f^2}{4}+\frac{ef}{2}\cos\varphi,$$

јер је $\cos(\pi-\varphi) = \cos\varphi$. Одузимањем добијених једнакости имамо $a^2-b^2 = -ef\cos\varphi < ef$, јер је $-\cos\varphi < 1$, за свако $\varphi \in (0,\pi)$.

1070. Како је $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma = (a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma)$ и $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, то је $c^2 = (a-b)^2+4S\dfrac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$. Како је други сабирак у овом збиру константан, страница c је најкраћа када је $a = b = \sqrt{\dfrac{2s}{\sin\gamma}}$.

1071. $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha = b^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+c^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-2bc\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = (b^2+c^2+2bc)\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b^2+c^2-2bc)\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$

1072. Применом косинусне теореме на троуглове AOB, BOC, COA имамо:

$$2an\cos\alpha = a^2+n^2-m^2, \quad 2bl\cos\alpha = b^2+l^2-n^2, \quad 2cm\cos\alpha = c^2+m^2-l^2,$$

где су l, m и n одстојања тачке O од темена троугла. Сабирањем левих и десних страна ове три једначине добијамо

$$2\cos\alpha(an+bl+cm) = a^2+b^2+c^2,$$

па, како је $P = \frac{1}{2}(an+bl+cm)\sin\alpha$, добијамо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4P}$.

1073. Означимо $AE = ED = x$. Тада је $BE = a - x$. Применом косинусне теореме за троугао BDE имамо $x^2 = \frac{a^2}{9}+(a-x)^2-\frac{2}{3}a(a-x)\cdot\frac{1}{2}$, одакле је $x = \frac{7}{15}a$, па је $CE = a^2+x^2-2ax\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{15}a$.

1074. Како је $\angle BOC = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, то је по синусној теореми $r = \frac{BC}{2\sin(90^\circ+\alpha/2)} = \frac{a}{2\cos(\alpha/2)}$.

1075. Како је $AB = 2BD$, то је $2 = \frac{AB}{BD} = \frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD} = \frac{\sin(\beta+\angle BAD)}{\sin\angle BAD} = \sin\beta\operatorname{ctg}\angle BAD + \cos\beta$. Одавде је $\angle BAD = \operatorname{arcctg}\frac{2-\cos\beta}{\sin\beta}$.

1076. Како је $\frac{CM}{AC} = \frac{CM}{BC}\cdot\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 80^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ} = 1$, то је троугао CMA једнакокраки, па је $\varphi = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

1077. Нека је C центар Земље, а S положај сателита у тренутку t (в. сл. 75). У $\triangle ACS$ познато је: $AC = R$, $SC = R+h$, $\angle CAS = \frac{\pi}{2}+\alpha$. Угао $\sigma = \angle ASC$ добија се из

$$\sin\sigma = \frac{R}{R+h}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{R\cos\alpha}{R+h},$$

а затим је $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \sigma$. Време пуног обиласка сателита око Земље је

$$T = \frac{2\pi t}{\frac{\pi}{2} - \alpha - \arcsin\frac{R\cos\alpha}{R+h}}.$$

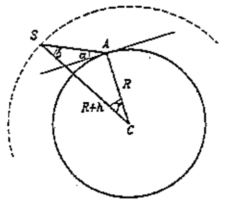
У конкретном случају је $T = 5346{,}7\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\,29\,\mathrm{min}\,6{,}7\,\mathrm{s}$.

1078.

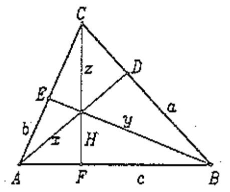
$$h_a = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}, \qquad l_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c},$$

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}, \qquad R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$



Сл. 75



Сл. 76

1079. а) Биће (в. сл. 76)

$$S_{AHB}+S_{BHC}+S_{CHA} = S. \tag{1}$$

Како је $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$, онда је $S_{BAC} = \frac{1}{2}yz\sin\alpha = \frac{1}{2}yz\frac{a}{2R}$ и слично за S_{AHB} и S_{CHA}. Дакле (1) се своди на $\frac{1}{4R}(ayz+bzx+cxy) = S$, а тражена једнакост се добија када се S замени са $\frac{abc}{4R}$;

б) Узимајући у обзир да су углови са теменом H једнаки угловима троугла, закључује се да је

$$\begin{aligned} c &= AF+FB = x\sin\beta+y\sin\alpha,\\ b &= z\sin\alpha+x\sin\gamma,\\ a &= y\sin\gamma+z\sin\beta. \end{aligned}$$

Сабирањем ових једнакости добија се

$$\begin{aligned} &(y+z)\sin\alpha+(z+x)\sin\beta+(x+y)\sin\gamma = 2s,\\ \text{тј.}\quad &(y+z)a+(z+x)b+(x+y)c = 4sR. \end{aligned}$$

в) Важи:

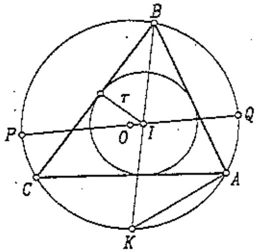
$$\begin{aligned} ax+by+cz &= a(AD-HD)+b(BE-HE)+c(CF-HF)\\ &= aAD+bBE+cCF-(aHD+bHE+cHF)\\ &= 6S-2S = 4S. \end{aligned}$$

г) Сабирањем једнакости б) и в) и растављањем на чиниоце добија се

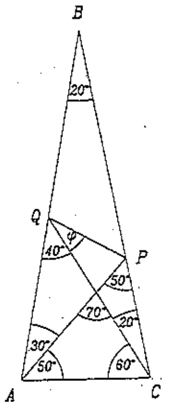
$$(x+y+z)\cdot 2s = 4sR+4S = 4s(R+r).$$

1080. Нека је K тачка у којој симетрала угла β сече круг описан око $\triangle ABC$ (в. сл. 77). Тада је $\triangle AKI$ једнакокрак $\left(\angle AKI = \gamma,\ \angle KIA = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} \implies \angle KAI = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$ па је $KI = KA = 2R\sin\frac{\beta}{2}$, а како је $BI = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}$, биће $BI\cdot KI = 2rR$. Нека права QI сече описани круг у тачкама P и Q. Редом важи:

$$\begin{aligned} BI\cdot KI &= QI\cdot PI\\ 2rR &= (R-OI)(R+OI)\\ 2rR &= R^2-OI^2\\ OI^2 &= R^2-2rR. \end{aligned}$$



Сл. 77



Сл. 78

1081. Рачунањем углова преко збира углова у троуглу, лако се закључује да је $PC = a$, $QC = a\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = 2a\cos 40^\circ$, где је $a = AC$, (в. сл. 78). Даље је

$$PQ^2 = a^2 + 4a^2\cos^2 40^\circ - 4a\cos 40^\circ\cos 20^\circ.$$

Синусна теорема примењена на $\triangle PQC$ даје $\dfrac{PQ^2}{\sin^2 20^\circ} = \dfrac{PC^2}{\sin^2\varphi}$, па је

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2 20^\circ}{1 + 4\cos 40^\circ(\cos 40^\circ - \cos 20^\circ)}.$$

Како је

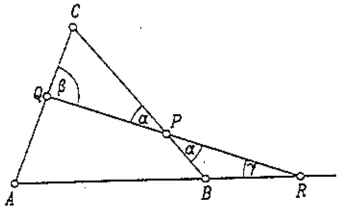
$$\begin{aligned}1 + 4\cos 40^\circ(\cos 40^\circ - \cos 20^\circ) &= 1 - 8\cos 40^\circ\sin 30^\circ\sin 10^\circ\\ &= 1 - 4\cos 40^\circ\sin 10^\circ = 1 - 4\cos 40^\circ\cos 80^\circ\\ &= 1 - 2(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ) = 2(1 - \cos 40^\circ) = 4\sin^2 20^\circ\end{aligned}$$

биће $\sin^2\varphi = \dfrac{1}{4}$, $\varphi = 30^\circ$.

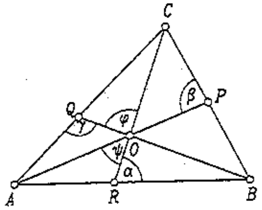
1082. Нека је $\angle CPQ = \alpha$, $\angle CQP = \beta$, $\angle PRB = \gamma$ (в. сл. 79). На основу синусне теореме је

$$\frac{RB}{\sin\alpha} = \frac{BP}{\sin\gamma}, \quad \frac{PC}{\sin\beta} = \frac{CQ}{\sin\alpha}, \quad \frac{AQ}{\sin\gamma} = \frac{AR}{\sin\beta}.$$

Множењем ових једнакости добија се $RB \cdot PC \cdot AQ = PB \cdot CQ \cdot AR$.



Сл. 79



Сл. 80

1083. Праве AP, BQ и CR деле $\triangle ABC$ на шест троуглова $\triangle AOR$, $\triangle BOR$, $\triangle BOP$, $\triangle COP$, $\triangle COQ$, $\triangle AOQ$ (в. сл. 80). Применом синусне теореме на сваки од њих добија се

$$\begin{aligned}&\frac{AR}{\sin\psi} = \frac{AO}{\sin\alpha}, &&\frac{AO}{\sin\gamma} = \frac{AQ}{\sin(\varphi+\psi)}\\ &\frac{BO}{\sin\alpha} = \frac{BR}{\sin\varphi}, &&\frac{BP}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{BO}{\sin\beta}\\ &\frac{CQ}{\sin\varphi} = \frac{CO}{\sin\gamma}, &&\frac{CO}{\sin\beta} = \frac{CP}{\sin\psi}\end{aligned}$$

Множењем тих једнакости добија се

$$AR \cdot CQ \cdot BP = BR \cdot AQ \cdot CP.$$

1084. Нека је $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \varphi$ и $CE = x$, $CD = y$ (в. сл. 81). Површина троугла ABC се може рачунати на три начина:

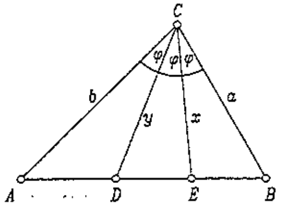
$$\begin{gathered}S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}by\sin\varphi + \frac{1}{2}ay\sin 2\varphi,\\ S_{ACE} + S_{BCE} = \frac{1}{2}bx\sin 2\varphi + \frac{1}{2}ax\sin\varphi,\\ S_{ACD} + S_{DCE} + S_{ECB}.\end{gathered}$$

Изједначавањем левих страна ових једнакости и узимањем у обзир услова задатка добија се систем од три једначине

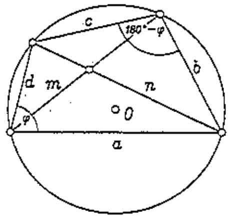
$$x(a+y) = 2ay\cos\varphi, \quad y(b+x) = 2bx\cos\varphi, \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$$

Решавањем система добија се

$$x = \frac{ab(n^2-m^2)}{n(bm-an)}, \quad y = \frac{ab(n^2-m^2)}{m(bm-an)}, \quad \cos\varphi = \frac{bn-am}{2(bm-an)}.$$



Сл. 81



Сл. 82

1085. Из очигледне неједнакости

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

добија се

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

или

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2S\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

На основу неједнакости аритметичке и геометријске средине је

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}},$$

одакле, због тога што је $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$, следи,

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq 2\sqrt{3}.$$

Једнакост важи ако је $a=b=c$.

1086. Нека су a,b,c,d странице, а m и n дијагонале тетивног четвороугла (в. сл. 82). Из косинусне теореме је

$$n^2=a^2+d^2-2ad\cos\varphi,\qquad n^2=b^2+c^2+2bc\cos\varphi,$$

па је

$$n^2(bc+ad)=(a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad=(ab+cd)(ac+bd).$$

Према томе

$$n^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}$$

Аналогно се добија

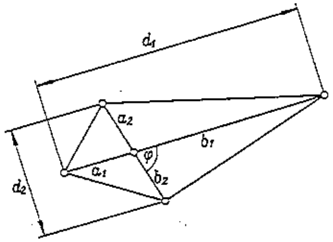
$$m^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Множењем последње две једнакости добија се *Птоломејева теорема*

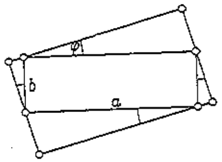
$$mn=ac+bd.$$

1087. Нека су a_1 и b_1, односно a_2 и b_2 одсечци на које су дијагонале d_1 и d_2 подељене тачком у којој се секу (в. сл. 83). Тада је

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(a_1b_2+b_2b_1+b_1a_2+a_2a_1)\sin\varphi\\&=\frac{1}{2}(a_1+b_1)(a_2+b_2)\sin\varphi=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.\end{aligned}$$



Сл. 83



Сл. 84

1088. Нека је φ угао који граде страница описаног и датог правоугаоника (в. сл. 84). Тада су странице описаног правоугаоника редом једнаке $a\cos\varphi+b\sin\varphi$ и $a\sin\varphi+b\cos\varphi$. Према услову задатка је

$$(a\cos\varphi+b\sin\varphi)(a\sin\varphi+b\cos\varphi)=m^2,$$

одакле је $\sin 2\varphi=\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}$. Задатак има решења ако и само ако је $0\leq\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}\leq 1$, што је еквивалентно следећим неједнакостима $\sqrt{ab}\leq m\leq\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

ТЕСТОВИ

У овом делу Збирке дато је девет тестова који садржином одговарају одређеним поглављима из градива другог разреда. Предвиђено је да се за сваки тачно урађени задатак добија по 10 поена, тако да један тест максимално доноси 100 поена. Погрешно урађен задатак доноси −1 поен. Време за израду једног теста је 90 минута. Одличним се могу сматрати резултати 80–100 поена, врло добрим 65–80, добрим 50–65 и довољним 35–50 поена.

Када се професори одлуче за састављање другачије варијанте тестова, у којима би задаци били различите тежине, могуће је број бодова по задатку одредити по некој другој шеми — на пример, као што је рађено за неке тестове у Математичкој гимназији: 1. и 2. задатак по 6 поена, 3–5. задатак по 8 поена, 6–8. задатак по 12 поена и 9. и 10. задатак по 14 поена (збир је 100 поена), с тим што је овде за погрешно решење одузимано по 25% поена по задатку.

1. Степеновање и кореновање

Варијанта I*

1. Израз $\left(\frac{3y}{4x^2}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{3y^2}\right)^3:\left(\frac{1}{2x^2y}\right)^4$, $x\neq 0$, $y\neq 0$ једнак је изразу:

A) $\frac{y^2}{96x^9y^5}$; B) $\frac{8x^7}{3}$; C) $\frac{8x^{15}}{3y^2}$; D) $\frac{3x^5}{8y}$; E) $\frac{x^7}{4}$.

2. Вредност израза $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$ је:

A) $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$; B) $11\sqrt{3}+9\sqrt{2}$; C) 5; D) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$; E) $5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

3. Израз $a\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}$, $a\geqslant 0$, једнак је изразу:

A) $\sqrt[4]{a^{11}}$; B) a^6; C) $\sqrt[4]{a^9}$; D) $\sqrt[4]{a^7}$; E) a^2.

4. Вредност израза $16^{-(2^{-2})^2}-16^{(2^2)^{-2}}$ је:

A) 0; B) 16; C) $2\sqrt[4]{2}$; D) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[16]{2}}$; E) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$.

---

* За први тест дајемо две варијанте. У њима су исти задаци распоређени на различите начине. На сличан начин могу се разне варијанте правити и за остале тестове.

5. Вредност израза $\dfrac{1-5^{-1/2}}{1+5^{1/2}}-\dfrac{5^{1/2}-5^{-1/2}}{4}$ је:

A) $\dfrac{\sqrt{5}+5}{2}$; B) $\dfrac{\sqrt{5}-5}{10}$; C) $2\sqrt{5}$; D) $-\dfrac{2}{5-\sqrt{5}}$; E) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

6. Вредност израза $[(a+a^{-1})-(b+b^{-1})]^{1/2}$ за $a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ је:

A) $2\sqrt{3}$; B) 16; C) $\sqrt{3}$; D) 2; E) 3.

7. Комплексни број $\dfrac{25}{3-4i}$ једнак је броју:

A) $3-4i$; B) $3+4i$; C) $\dfrac{3+4i}{5}$; D) $\dfrac{3-4i}{5}$; E) $\dfrac{3+4i}{25}$.

8. Вредност израза $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ је:

A) $\dfrac{19}{216}$; B) $\dfrac{208}{27}$; C) $-\dfrac{13}{4}$; D) $\sqrt[3]{16^4}-\sqrt[3]{\dfrac{81}{16}}$; E) ниједан од одговора A), B), C), D) није тачан.

9. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $(2+i)(x+iy)=5-5i$. Тада је збир $x+y$ једнак:

A) 2; B) 3; C) 1; D) -2; E) -3.

10. Вредност израза $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\,\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\,\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$ припада интервалу:

A) $(-\infty,0]$; B) $(0,2]$; C) $(2,4]$; D) $(4,6]$; E) $(6,+\infty)$.

Варијанта II

1. Вредност израза $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$ је:

A) $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$; B) $11\sqrt{3}+9\sqrt{2}$; C) 5; D) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$; E) $5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

2. Израз $a\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}$, $a\geqslant 0$, једнак је изразу:

A) $\sqrt[4]{a^{11}}$; B) a^6; C) $\sqrt[4]{a^9}$; D) $\sqrt[4]{a^7}$; E) a^2.

3. Израз $\left(\dfrac{3y}{4x^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2x}{3y^2}\right)^3:\left(\dfrac{1}{2x^2y}\right)^4$, $x\neq 0$, $y\neq 0$ једнак је изразу:

A) $\dfrac{y^2}{96x^9y^5}$; B) $\dfrac{8x^7}{3}$; C) $\dfrac{8x^{15}}{3y^2}$; D) $\dfrac{3x^5}{8y}$; E) $\dfrac{x^7}{4}$.

4. Вредност израза $[(a+a^{-1})-(b+b^{-1})]^{1/2}$ за $a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ је:

A) $2\sqrt{3}$; B) 16; C) $\sqrt{3}$; D) 2; E) 3.

5. Комплексни број $\dfrac{25}{3-4i}$ једнак је броју:

A) $3-4i$; B) $3+4i$; C) $\dfrac{3+4i}{5}$; D) $\dfrac{3-4i}{5}$; E) $\dfrac{3+4i}{25}$.

6. Вредност израза $\dfrac{1-5^{-1/2}}{1+5^{1/2}}-\dfrac{5^{1/2}-5^{-1/2}}{4}$ је:

A) $\dfrac{\sqrt{5}+5}{2}$; B) $\dfrac{\sqrt{5}-5}{10}$; C) $2\sqrt{5}$; D) $-\dfrac{2}{5-\sqrt{5}}$; E) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

7. Вредност израза $16^{-(2^{-2})^2}-16^{(2^2)^{-2}}$ је:

A) 0; B) 16; C) $2\sqrt[4]{2}$; D) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[16]{2}}$; E) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$.

8. Вредност израза $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\,\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\,\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$ припада интервалу:

A) $(-\infty,0]$; B) $(0,2]$; C) $(2,4]$; D) $(4,6]$; E) $(6,+\infty)$.

9. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $(2+i)(x+iy)=5-5i$. Тада је збир $x+y$ једнак:

A) 2; B) 3; C) 1; D) -2; E) -3.

10. Вредност израза $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ је:

A) $\dfrac{19}{216}$; B) $\dfrac{208}{27}$; C) $-\dfrac{13}{4}$; D) $\sqrt[3]{16^4}-\sqrt[3]{\dfrac{81}{16}}$; E) ниједан од одговора A), B), C), D) није тачан.

2. Квадратна једначина и квадратна функција (I део)

1. Квадратна једначина $3x^2-5x+19=0$ има корене x_1 и x_2. Корени једне од следећих једначина су $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$:

A) $\dfrac{1}{3x^2-5x+19}=0$; B) $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{19}=0$; C) $\dfrac{1}{19}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{3}=0$; D) $19x^2-5x+3=0$; E) $19x^2+5x+3=0$.

2. Колико различитих реалних решења има једначина $x^2+|x-1|=1$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

3. Збир свих вредности параметра a за које су решења једначине

$$x^2-2000x+a^2-4a+1000=0$$

реципрочни бројеви је:

A) 2000; B) -1; C) 1; D) -4; E) 4.

4. Колико различитих реалних решења има једначина

$$(x^2-5x+9)^2-5(x^2-5x+9)+6=0?$$

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

5. Производ свих вредности параметра m за које корени x_1 и x_2 једначине $3x^2-(2m+3)x+m^2-3=0$ задовољавају једнакост $2x_1+3x_2=8$ је:

A) $\frac{29}{3}$; B) $\frac{18}{3}$; C) 1; D) $-\frac{29}{9}$; E) -3.

6. Збир решења једначине $(x-2)^2-13+\dfrac{36}{(x-2)^2}=0$ је:

A) 13; B) 4; C) 8; D) 10; E) 3.

7. Ако за корене x_1 и x_2 једначине $(11-m^2)x^2+2(m+1)x-1=0$ важи $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=6$, тада је:

A) $m\in(-\infty,-1]$; B) $m\in(-1,1]$; C) $m\in(1,3]$; D) $m\in(3,5]$; E) $m\in(5,+\infty)$.

8. Број свих позитивних решења једначине $x^4+2x^3-50x^2-2x+1=0$ је:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

9. Ако је збир кубова решења једначине $x^2-5x+m-4=0$ једнак 35, тада је број m једнак:

A) 2; B) 10; C) $\frac{37}{3}$; D) $\frac{37}{5}$; E) $\frac{13}{3}$.

10. Производ свих вредности реалног параметра m таквих да корени једначине $8(x^2-1)=(m-2)x-m$ буду једнаки је:

A) 36; B) 260; C) -260; D) 4; E) -36.

3. Квадратна једначина и квадратна функција (II део)

1. Функција $f(x)=ax^2+6x-4$ има максимум једнак 3 ако и само ако је:

A) $a=-\frac{9}{7}$; B) $a=\frac{9}{7}$; C) $a=-1$; D) $a=-\frac{7}{9}$; E) $a=-\frac{18}{11}$.

2. Колико целих бројева задовољава неједначину $x^2-2x<3x+14$?

A) мање од 6; B) 6; C) 7; D) 8; E) више од 8.

3. Једначина $x+1=\sqrt{x+7}$:

A) нема решења; B) има тачно једно решење; C) има два решења чији је збир -1; D) има два решења чији је збир мањи од -1; E) има два решења чији је збир већи од -1.

4. Дата је квадратна функција $f(x)=x^2-2(a+2)x-2a-5$, $a\in\mathbf{R}$. Најмања вредност ове функције је:

A) $a+2$; B) $-(a+3)^2$; C) $-(a+2)^2$; D) $-a^2-6a+1$; E) $-(a+3)$.

5. Број целобројних решења неједначине $3\sqrt{x}+x-4<0$ је:

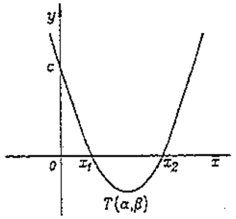
A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) веће од 3.

6. Скуп свих вредности реалног параметра a таквих да за свако $x\in\mathbf{R}$ важи $(a-2)x^2-2ax+a-1<0$ је:

A) $(2,+\infty)$; B) $(2/3,2)$; C) $(-\infty,2/3)$; D) $\varnothing$; E) $(2/3,+\infty)$.

7. График функције $y=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$, приказан је на слици. Тачан је исказ:

A) $a>0,\ b<0,\ c<0$; B) $a>0,\ b>0,\ c>0$;
C) $a>0,\ b>0,\ c<0$; D) $a>0,\ b<0,\ c>0$;
E) $a<0,\ b>0,\ c>0$.



8. Број уређених парова (x,y) који су решења система једначина $x+y^2=9$, $xy^2=20$ је:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

9. Решења неједначине $x^2\geqslant 4$ су сви реални бројеви x такви да је:

A) $x\geqslant 2$; B) $x\geqslant\pm 2$; C) $x\leqslant -2$; D) $x\leqslant -2$ или $x\geqslant 2$; E) $-2\leqslant x\leqslant 2$.

10. Скуп решења неједначине $\sqrt{x^2-9}>x-9$ је:

A) $(5,+\infty)$; B) $(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$; C) $[3,+\infty)$; D) $[9,+\infty)$; E) $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

4. Експоненцијалне једначине и неједначине

1. Решење једначине $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}}{4^{-\frac{x}{5}}}(\sqrt[5]{2})^{3x}=4$ припада интервалу:

A) $(-\infty,0)$; B) $[0,1)$; C) $[1,2)$; D) $[2,3)$; E) $[3,+\infty)$.

2. Број реалних решења једначине $2^{\sqrt{-x^2+2x+3}}=4^{x-2}$ је:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

3. Решење једначине $\sqrt[x-7]{32^{x+5}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$ припада интервалу:

A) $(-\infty,-5)$; B) $[-5,5)$; C) $[5,15)$; D) $[15,25)$; E) $[25,+\infty)$.

4. Збир свих вредности реалног параметра m за које једначина

$$4x^2 - 4(2^m - 1)x - 3(2^{2m} - 2^m) = 0$$

има два једнака реална решења је:

A) -2; B) 0; C) 4; D) 2; E) такве вредности не постоје.

5. Решење једначине $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 10$ припада интервалу:

A) $(-\infty, -2]$; B) $(-2, 0]$; C) $(0, 2]$; D) $(2, 4]$; E) $(4, +\infty)$.

6. Једначина $5 \cdot 16^x + 2 \cdot 625^x = 7 \cdot 100^x$ има:

A) тачно једно решење; B) два решења чији је збир $\frac{5}{2}$; C) два решења чији је производ 0; D) ниједно решење; E) четири решења.

7. Збир квадрата решења једначине $3^{x^2-2x-10} = \frac{1}{9}$ је:

A) 10; B) 36; C) 25; D) 16; E) 20.

8. Систем једначина $3^x - 2^{y/2} = 7$, $3^{2x} - 2^y = 77$:

A) нема решења; B) има једно решење; C) има два решења; D) има три решења; E) има бесконачно много решења.

9. Скуп решења неједначине $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} > 7^{x+1} - 7^{x-1}$ је:

A) $(-\infty, 2)$; B) $(2, +\infty)$; C) $(0, 2)$; D) $(1, 2)$; E) $(-2, 2)$.

10. Скуп решења неједначине $5^{2x+1} > 5^x + 4$ је:

A) $(-\infty - 4/5) \cup (1, +\infty)$; B) $(-\infty, 0)$; C) $(0, 1)$; D) $(0, +\infty)$; E) ниједан од одговора A, B, C, D није тачан.

5. Логаритми

1. Вредност израза $(\log^2_{\frac{1}{2}} 4)^{\frac{1}{2}} + (\log^2_2 4)^{\frac{1}{2}}$ је:

A) 0; B) 2; C) 4; D) 8; E) 1.

2. Област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+3}{x}}$ је:

A) $[-3, -3/2)$; B) $(-\infty, -3] \cup (-3/2, +\infty)$; C) $(-3, -3/2]$; D) $(-\infty, -3/2) \cup (0, +\infty)$; E) $(-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$.

3. Вредност израза $\left[(\log_3 2)^{-1} - \log_2 0{,}75 + \log_{16} 2\right]^{-\frac{3}{2}}$ је:

A) $\frac{28}{7}$; B) $\frac{8}{27}$; C) 1; D) $\frac{8}{7\sqrt{7}}$; E) $\frac{3}{2}$.

4. Решење једначине $\log_5(\log_2(\log_7 x)) = 0$ припада интервалу:

A) $(-10, 10]$; B) $(10, 30]$; C) $(30, 50]$; D) $(50, 70]$; E) $(70, 90]$.

5. Вредност израза $(\log_3 4 + \log_2 3)^2 - (\log_3 4 - \log_2 3)^2$ је:

A) 16; B) $2(\log^2_3 4 + \log^2_2 3)$; C) $\log_3 16$; D) $\log_2 9$; E) 8.

6. Решење једначине $\log_3(3 - 2 \cdot 3^{x+1}) = 2 + 2x$ припада интервалу:

A) $(-\infty, -2)$; B) $[-2, 0)$; C) $[0, 2)$; D) $[2, 4)$; E) $[4, +\infty)$.

7. Вредност израза $9^{\log_3 2} - 2\log_{10} 2 - \log_{10} 25$ је:

A) 2; B) 4; C) $4 - \log_{10} 50$; D) -1; E) 0.

8. Скуп решења неједначине $\log_x 2 > 1$ је:

A) $(0, 1) \cup (1, 2)$; B) $(1, 2)$; C) $(0, 2)$; D) $(0, 1)$; E) $(2, +\infty)$.

9. Производ свих решења једначине $\log_{10} x^3 \log_{10} x^4 = 108$ је:

A) -9; B) 9; C) -1; D) 1; E) 4.

10. Збир решења једначине $\log^2_{10} x - 5\log_{10} x + 6 = 0$ је:

A) 1100; B) 5; C) 11; D) 110; E) 11000.

6. Тригонометрија (I део)

1. Ако је $\sin 20° = x$, тада је $\operatorname{tg} 70°$ једнако:

A) $\sqrt{1-x^2}$; B) x; C) 1; D) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; E) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Вредност израза $\sin\left(-\frac{67\pi}{6}\right)$ је:

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; E) $\sqrt{3}$.

3. Ако је $\cos\alpha = -\frac{40}{41}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, тада је $\operatorname{tg}\alpha$ једнако:

A) $\frac{40}{9}$; B) $-\frac{40}{9}$; C) $-\frac{9}{41}$; D) $-\frac{9}{40}$; E) $\frac{9}{40}$.

4. Израз $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$ идентички је једнак изразу:

A) $\frac{2}{\sin\alpha}$; B) $-\frac{2}{\sin\alpha}$; C) $\frac{1}{2}\sin\alpha$; D) $\cos\alpha$; E) $\frac{2}{\cos\alpha}$.

5. Вредност израза $\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$ једнака је:

A) 1; B) $\frac{1}{2}$; C) 0; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; E) -1.

6. Ако је $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\sin\alpha > 0$, вредност израза $\sin 2\alpha$ је:

A) $\frac{120}{119}$; B) $-\frac{119}{169}$; C) $-\frac{120}{169}$; D) $-\frac{119}{120}$; E) $\frac{120}{169}$.

7. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$ и $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$, тада је $\cos\frac{\alpha}{2}$ једнако:

A) $-\frac{3}{5}$; B) $\frac{3}{5}$; C) $\frac{4}{5}$; D) $-\frac{4}{3}$; E) $\frac{3}{4}$.

8. Вредност израза $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ је:

A) $\sin\alpha$; B) $2\sin\alpha$; C) $\cos\alpha$; D) $2\cos\alpha$; E) $\cos 2\alpha$.

9. Вредност израза $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}$ је:

A) 2; B) $\cos 10^\circ$; C) $\frac{2}{\cos 10^\circ}$; D) $\frac{1}{\sin 80^\circ}$; E) $\frac{2}{\sin 80^\circ}$.

10. Вредност израза $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$ је:

A) $\sin\frac{2\pi}{5}$; B) $2\sin\frac{3\pi}{5}$; C) $\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{5}$; D) $\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{5}$; E) $-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}$.

7. Тригонометрија (II део)

1. Вредност израза $\operatorname{tg} 1560^\circ - \operatorname{ctg} 1560^\circ$ је:

A) $\frac{1}{2}$; B) 0; C) $-2\sqrt{3}$; D) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2. Ако је $\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, тада је $\sin(\alpha+\beta)$ једнако:

A) 0; B) $-\frac{24}{25}$; C) $\frac{24}{25}$; D) -1; E) 1.

3. Израз $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)$ идентички је једнак изразу:

A) $3\sin\alpha$; B) 0; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) $\sin\alpha$; E) $3\cos\alpha$.

4. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$, тада је $\operatorname{tg}\beta$ једнако:

A) $\frac{2}{3}$; B) -1; C) $-\frac{1}{2}$; D) 1; E) $\frac{1}{2}$.

5. Израз $\cos(90^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha) - \cos(180^\circ+\alpha)\sin(90^\circ-\alpha)$ једнак је за све α изразу:

A) $-\cos 2\alpha$; B) 1; C) $\sin 2\alpha$; D) $-\sin 2\alpha$; E) 0.

6. Ако је $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos 2\alpha \neq 0$, тада је израз $\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha}$ једнак изразу:

A) $\operatorname{ctg}\alpha$; B) $\operatorname{tg}\alpha$; C) $\operatorname{ctg}\alpha$; D) 1; E) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

7. Ако је $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$, онда је $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$ једнако:

A) -2; B) $\frac{1}{2}$; C) 2; D) $-\frac{1}{2}$; E) 4.

8. Ако је $\operatorname{tg} x \neq -1$ и $\cos x \neq 0$, израз $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$ идентички је једнак изразу:

A) $\operatorname{ctg} x$; B) $\operatorname{tg} 2x$; C) $\operatorname{ctg} 2x$; D) $\operatorname{tg} x$; E) $\operatorname{tg}^2 x$.

9. Израз $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$ идентички је једнак изразу:

A) $2\sin(60^\circ+\alpha)$; B) $2\cos(60^\circ+\alpha)$; C) $2\sin(30^\circ+\alpha)$; D) $2\cos\alpha$; E) ниједан од одговора A, B, C, D није тачан.

10. Вредност израза $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$ је:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{1}{4}$; D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{1}{2}$.

8. Тригонометрија (III део)

1. Основни период функције $f(x) = 3\sin 2\pi x$ је:

A) 1; B) π; C) $\frac{\pi}{2}$; D) $\frac{\pi}{3}$; E) $\frac{2\pi}{3}$.

2. Фазни померај функције $y = 2\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$ је:

A) $-\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{3}$; C) $-\frac{\pi}{6}$; D) $-\frac{\pi}{4}$; E) $\frac{2\pi}{3}$.

3. Све нуле функције $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ су $(k \in \mathbf{Z})$:

A) $\pi k + \frac{\pi}{8}$; B) $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}$; C) $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}$; D) $\frac{\pi k}{2}$; E) $\pi k - \frac{\pi}{8}$.

4. Координате тачке максимума у основном периоду функције $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ су:

A) $\left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)$; B) $\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right)$; C) $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; D) $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$; E) $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$.

5. Координате тачке минимума у основном периоду функције

$$y = -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

су:

A) $\left(\frac{8\pi}{3}, 2\right)$; B) $\left(\frac{2\pi}{3}, 2\right)$; C) $\left(-\frac{\pi}{3}, -2\right)$; D) $\left(\frac{5\pi}{3}, -2\right)$; E) $\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$.

6. Дате су функције $y = -\sin x$ и $y = \operatorname{cosec} x$. Заокружити тачан одговор:

A) обе функције су парне; B) обе функције су непарне; C) парна је само функција $\operatorname{cosec} x$; D) непарна је само функција $-\sin x$; E) ниједан од одговора A, B, C, D није тачан.

7. Функција $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ позитивна је у основном периоду за:

A) $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$; B) $x \in \left(2\pi, \frac{11\pi}{3}\right)$; C) $x \in (\pi, 2\pi)$; D) $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$;
E) $x \in \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right)$.

8. Функција $y = -\cos 2x$ негативна је у основном периоду за:

A) $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; B) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; C) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; D) $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$;
E) $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

9. Вредност израза $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} 0$ је:

A) $\frac{\pi}{2}$; B) $\frac{\pi}{4}$; C) $\frac{3\pi}{4}$; D) π; E) $\frac{\pi}{3}$.

10. Вредност израза $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ је:

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{\pi}{3}$; E) $\frac{\pi}{6}$.

9. Тригонометрија (IV део)

1. У интервалу $(0, \pi)$ једначина $4\sin 2x \cos 2x + 1 = 0$ има:

A) једно решење; B) два решења; C) три решења; D) четири решења; E) шест решења.

2. Скуп решења једначине $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$ $(k \in \mathbf{Z})$ је:

A) $\{k\pi\}$; B) $\left\{k\frac{\pi}{3}\right\}$; C) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$; D) $\mathbf{R}$; E) $\varnothing$.

3. Дужине страница једног троугла су 7 cm, 8 cm и 13 cm. Највећи угао тог троугла једнак је :

A) 90°; B) 105°; C) 120°; D) 135°; E) 150°.

4. Ако је у троуглу $a = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$, $b = 14\,\text{cm}$, $\beta = 30^\circ$, дужина странице c је:

A) $18\sqrt{3}\,\text{cm}$; B) 22 cm; C) 21 cm; D) $15\sqrt{3}\,\text{cm}$; E) 24 cm.

5. Ако је у троуглу $a = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$, $\gamma = 45^\circ$ и површина $P = 42\,\text{cm}^2$, дужина странице c је:

A) $8\sqrt{2}\,\text{cm}$; B) 10 cm; C) $2\sqrt{46}\,\text{cm}$; D) 12 cm; E) 14 cm.

6. У троуглу ABC дужина странице a је $10\sqrt{2}\,\text{cm}$, а полупречника описаног круга троугла је 10 cm. Ако је у том троуглу $\gamma = 30^\circ$ и α туп угао, тада је угао β једнак:

A) 15°; B) 30°; C) 45°; D) 50°; E) ниједан од одговора A, B, C, D није тачан.

7. Решења система неједначина $\sin x > \frac{1}{2}$, $\cos x < \frac{1}{2}$ су сви (и само они) реални бројеви x за које постоји $k \in \mathbf{Z}$ тако да је:

A) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; B) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;
C) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; D) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;
E) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

8. Основни период функције $y = |\sin x|$ је:

A) $\frac{\pi}{4}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) π; D) 2π; E) 4π.

9. Скуп решења једначине $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$ је $(k \in \mathbf{Z})$:

A) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}$; B) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$; C) $\left\{\pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right\}$; D) $\left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right\}$;
E) ниједан од одговора A, B, C, D није тачан.

10. Колико решења једначине $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ припада интервалу $(0, \pi)$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

Резултати

Тест 1, варијанта I

1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** E. **5.** B. **6.** D. **7.** B. **8.** B. **9.** D. **10.** C.

Тест 1, варијанта II

1. A. **2.** C. **3.** B. **4.** D. **5.** B. **6.** B. **7.** E. **8.** C. **9.** D. **10.** B.

Тест 2.

1. D. 2. C. 3. E. 4. C. 5. A. 6. C. 7. C. 8. C. 9. B. 10. B.

Тест 3.

1. A. 2. D. 3. B. 4. B. 5. B. 6. C. 7. D. 8. E. 9. D. 10. E.

Тест 4.

1. D. 2. B. 3. C. 4. A. 5. C. 6. C. 7. E. 8. B. 9. A. 10. D.

Тест 5.

1. C. 2. A. 3. B. 4. C. 5. E. 6. B. 7. A. 8. B. 9. D. 10. A.

Тест 6.

1. D. 2. B. 3. E. 4. A. 5. C. 6. C. 7. A. 8. C. 9. D. 10. E.

Тест 7.

1. D. 2. A. 3. B. 4. E. 5. B. 6. E. 7. C. 8. D. 9. A. 10. E.

Тест 8.

1. A. 2. D. 3. B. 4. C. 5. E. 6. B. 7. D. 8. A. 9. C. 10. B.

Тест 9.

1. D. 2. E. 3. C. 4. B. 5. B. 6. A. 7. E. 8. C. 9. C. 10. D.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Антонов и др.: *Сборник задач по элементарной математике*, Москва 1969.

[2] Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин: *Задачи по элементарной математике повышеной трудности*, Москва 1969.

[3] В. М. Говоров и др.: *Сборник конкурсных задач по математике*, Москва 1983.

[4] В. Драговић, П. Младеновић, С. Огњановић: *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих школа*, Друштво математичара Србије, Београд 1998.

[5] В. Драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић: *Републичка и савезна такмичења из математике*, Друштво математичара Србије, Београд 2002.

[6] Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, Л. Милин: *Тригонометрија*, Круг, Београд 1999.

[7] В. К. Егерев и др.: *Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы*, Москва 1969.

[8] В. С. Кущенко: *Сборник конкурсных задач по математике*, Ленинград 1968.

[9] В. Б. Лидский и др.: *Задачи по элементарной математике*, Москва 1969.

[10] П. С. Моденов: *Сборник задач по специальном курсу элементарной математике*, Москва 1957.

[11] С. Огњановић: *Математика* 4^+, Круг, Београд 2001.

[12] И. Х. Сивашинский: *Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям*, Москва 1979.

[13] F. J. Budden: *Complex numbers and their applications*, London 1968.

[14] Grupa autora: *Savezna i republička matematička takmičenja srednjoškolaca*, Društvo matematičara Srbije, Beograd 1984.

[15] Ž. Ivanović, L. Milin: *Rešeni zadaci sa prijemnih i klasifikacionih ispita iz matematike 1975–1985*, Naučna knjiga, Beograd 1986.

[16] Z. Kadelburg, P. Mladenović: *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Beograd 1987.